

- تاس به کر مهندس یا سنی از نظر اندازه گیری یکی به قدر کافی قوی انتخاب شوند تا توانایی تحمل بارهای وارده داشته باشند و آن بار به صورت ایمن به تکیه گاه (زمین) انتقال دهند. همچنین یک سازه بایستی از صلبیت خوبی برخوردار باشد تا بتواند بارهای وارده را بدون آنکه تغییر شکل زیادی از خود نشان دهد، تحمل نماید. سرانجام یک عضو سازه ای بایستی آنقدر لاغر باشد که زیر اثر بار کارش را به گونه غوره دارین برورد. نتیجه آنکه هر سازه مهندسی این سه شرط را بایستی در کنار حداقل هزینه برآورده نماید. بنابراین موضوعی از علم مکانیک که با استفاده از روش کوشلیلی به بررسی و تعیین مقاومت (استحکام)، صلبیت (استحکام) تغییر شکل و پایداری کشسانی اعضای باربر می پردازد به مکانیک حادان مشهور است. «مقاومت مصالح» یا مکانیک اجسام تحت نیرو نام در دیگری هستند که به این زمینه مطالعاتی اطلاق می گردد.

- در مقاومت مصالح ما با چهار کمیت طول، زمان، جرم و نیرو سروکار داریم:

طول: طول بهر تعیین موقعیت یک نقطه در فضا و مشخص کردن اندازه ی یک سیستم فیزیکی به کار می رود.

زمان: دانستن مکان یک حادثه کافی نیست بلکه زمان آن هم اهمیت دارد.

جرم: به مقدار ماده ی موجود در یک جسم جرم آن جسم گویند. جرم معیار است بهر مقاومت در برابر شتاب

نیرو: نیرو نشان دهنده ی اثر یک جسم بر جسم دیگر است. این اثر می تواند تحت تماس دو جسم یا یکدیگر و یا عدم تماس آنها باشد.

- سیستم آحاد و ضرایب تبدیل

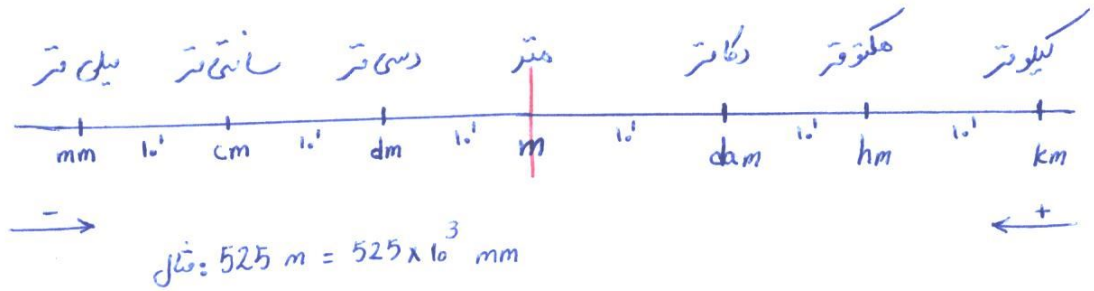
بهر حل مسائل عددی بایز یک سیستم آحاد مشخص استفاده نمود. با توجه به کارهای رایج مهندسی در سیستم

آحاد بین المللی « SI »، سیستم آحاد مرسوم آمریکا « USCS » مورد استفاده قرار می گیرند.

- واحدهای سیستم «SI» و «USCS»

وزن	جرم	طول	زمان
نیوتن N	کیلوگرم kg	متر m	ثانیه s
پاوند lb	اسلاو slug	فوت ft	ثانیه s
سیستم SI	سیستم USCS		

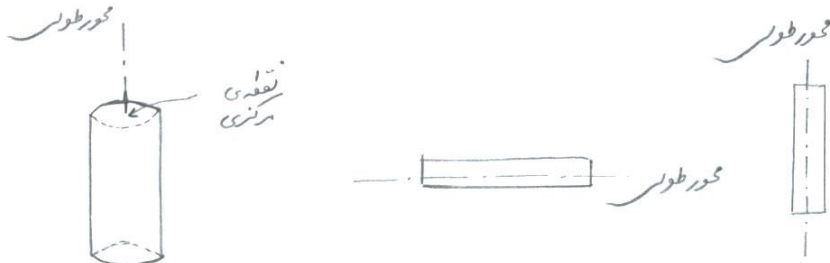
- تبدیل واحدهای طول



فصل اول: مفهوم تنش Stress و کرنش Strain

- بار محوری: اگر بارهای خارجی یا برآیند آن ها، در امتداد محور عضو باشند، این نوع بار را بارهای محوری

می نامند. متصور از محور طولی عضو، محوری است که در امتداد طول عضو از نقطه‌ی مرکزی سطح مقطع عبور کند.



- بار کششی: اگر اعمال بار به گونه‌ای باشد که طول جسم میل به افزایش داشته باشد، بار را کششی گویند. واضح

است که در این حالت طول ثانویه بیشتر از طول اولیه‌ی جسم خواهد بود. علامت اختصاصی این بار P است و طبق

قرار دارد آن را با علامت $(+P)$ در نظر می‌گیرند.

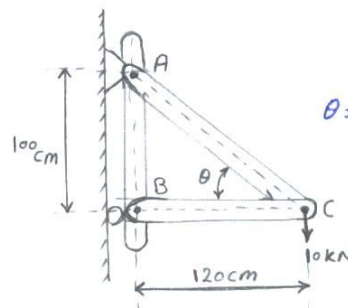
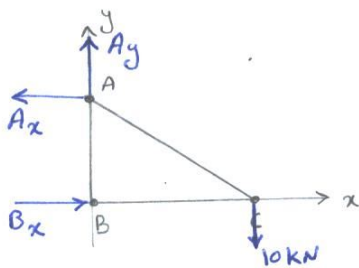


- بار فشاری: در صورتی که اعمال بار به گونه‌ای باشد که طول جسم میل به کاهش داشته باشد، بار را فشاری

گویند. بدیهی است طول ثانویه‌ی جسم از طول اولیه‌ی آن کم‌تر خواهد بود.



مثال ۱) نیروهای اعضای AC و BC در شغل زیر را بدست آورید.



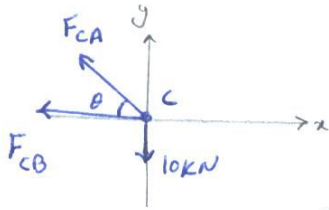
$$\theta = \text{Arctg} \frac{100}{120} = 39.81^\circ$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \rightarrow B_x - A_x = 0 \rightarrow B_x = A_x$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 10 = 0 \rightarrow A_y = 10 \text{ kN}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \rightarrow 10 \times 1.2 - B_x \times 1 = 0 \rightarrow B_x = 12 \text{ kN}$$

$$A_x = B_x = 12 \text{ kN}$$



$$\sum F_x = 0 \rightarrow -F_{CB} + F_{CA} \cos \theta = 0 \quad (1)$$

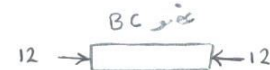
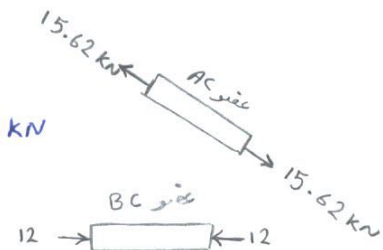
$$\sum F_y = 0 \rightarrow -10 + F_{CA} \sin \theta = 0 \quad (2)$$

$$\text{از معادله 2} \rightarrow -10 + F_{CA} \times 0.64 = 0 \rightarrow F_{CA} = \frac{10}{0.64} = 15.62$$

$$F_{CA} = 15.62 \text{ kN} \quad \text{کشش}$$

$$\text{معادله 1: } -F_{CB} + 15.62 \times 0.77 = 0 \rightarrow F_{CB} = -12 \text{ kN}$$

$$F_{CB} = 12 \text{ kN} \quad \text{فشردگی}$$



- تنش ناشی از بار محوری

نیروی وارد بر واحد سطح، یا شدت نیروهای توزیع شده روی یک مقطع را تنش وارد بر این مقطع می نامند و آن را با حرف یونانی سیگما نشان می دهند. بنابراین تنش در عضو که مساحت سطح مقطع آن A و تحت تأثیر بار محوری P

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

باشد، از تقسیم مقدار P بر مساحت A به دست می آید:

نکته ۱: جهت نشان دادن تنش کشش (عضو در حالت کشش) علامت مثبت و جهت نشان دادن تنش فشردگی (عضو در حالت فشرده) علامت منفی به کار می بریم.

نکته ۲: از آنجا که در این درس از یکاهای سری SI استفاده می کنیم، و به این ترتیب P بر حسب نیوتن

(N) و A بر حسب متر مربع (m^2) بیان می شود، تنش σ را بر حسب N/m^2 به دست می آوریم. این

یکارای کال (Pa) می باشد. یکارال کمیت فوق العاده کوچکی است و در عمل، باید مضارب این یکا،

یعنی: کیلو یکارال (kPa)، مگا یکارال (MPa)، و گیگا یکارال (GPa) را به کار ببریم.

$$1 \text{ kPa} = 10^3 \text{ Pa} = 10^3 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ N/mm}^2$$

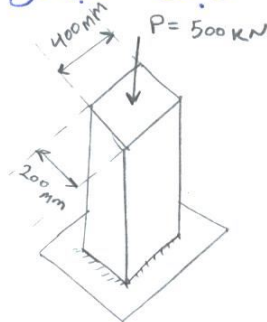
$$1 \text{ GPa} = 10^9 \text{ Pa} = 10^9 \text{ N/m}^2$$

نکته ۳: موقع استفاده از یکای رایج ایالات متحده (USCS)، معمولاً نیروی P بر حسب پوند (lb) یا کیلوپوند (kip) و مساحت سطح مقطع A بر حسب اینچ مربع (in^2) بیان می‌شود. در این صورت تنش σ بر حسب پوند بر اینچ مربع (psi) یا کیلوپوند بر اینچ مربع (ksi) بدست می‌آید.

$$1 \text{ psi} \cong 7 \text{ kPa}$$

$$1 \text{ ksi} \cong 7 \text{ MPa}$$

مثال ۱۲: ستونی مطابق شکل زیر تحت تاثیر بار محوری ۵۰۰ کیلو نیوتن قرار دارد. مطلوبیت یی به تنش



در پای ستون (از وزن ستون صرف نظر شود).

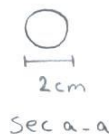
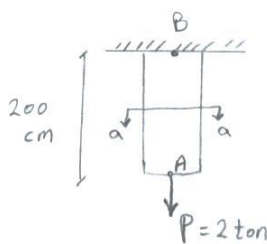
$$P = -500 \times 10^3 \text{ N}$$

$$A = 400 \times 200 = 80000 \text{ mm}^2$$

$$\sigma = ?$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{-500 \times 10^3}{80000} = -6.25 \text{ N/mm}^2 = -6.25 \text{ MPa}$$

مثال ۱۳: مقدار تنش در میله شکل زیر چقدر است؟ (از وزن میله صرف نظر کنید).



$$P = 2 \text{ ton} = 2 \times 10^3 \text{ kg}$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 2^2}{4} = 3.14 \text{ cm}^2$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{2 \times 10^3}{3.14} = 636.94 \text{ kg/cm}^2$$

مثال ۱۴: در صورتی که در سطل قبل وزن مخصوص آهن 7800 kg/m^3 باشد، تنش در سطل چقدر است؟

$$\text{وزن} \quad \sigma = \frac{W}{V} \rightarrow W = \sigma \times V$$

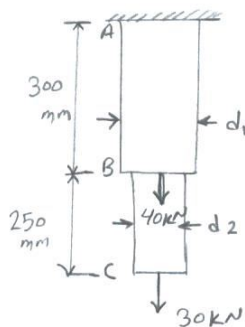
$$V = 3.14 \times 200 = 628 \text{ cm}^3 \quad \Rightarrow \quad \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم استوانه}$$

$$W_{\text{میله}} = 7800 \times 628 \times 10^{-6} = 4.9 \text{ kg}$$

$$\text{نیروی کل} = \underbrace{2 \times 10^3}_{2 \text{ ton} = \text{kg}} + 4.9 = 2004.9 \text{ kg}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{2004.9}{3.14} = 638.5 \text{ kg/cm}^2$$

مثال ۱۵) دو میله استوانه‌ای توپیر AB و BC در B به هم جوش داده شده‌اند و مطابق شکل زیر بارگذاری شده‌اند. با این اطلاع که $d_1 = 50 \text{ mm}$ و $d_2 = 30 \text{ mm}$ است، تنش قائم ~~در~~ در میله AB و میله BC را پیدا کنید.



میله AB :

$$P = 40 + 30 = 70 \text{ kN} = 70 \times 10^3 \text{ N} \quad ۱۰$$

$$A = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{3.14 \times (50)^2}{4} = 1.9635 \times 10^3 \text{ mm}^2 = 1.9635 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \quad ۱۰$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{70 \times 10^3}{1.9635 \times 10^{-3}} = 35.7 \times 10^6 \text{ Pa} \quad ۱۰$$

$$\sigma_{AB} = 35.7 \text{ MPa}$$

میله BC :

$$P = 30 \text{ kN} = 30 \times 10^3 \text{ N} \quad ۱۰$$

$$A = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{\pi}{4} \times (30)^2 = 706.86 \text{ mm}^2 = 706.86 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \quad ۱۰$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{30 \times 10^3}{706.86 \times 10^{-6}} = 42.4 \times 10^6 \text{ Pa} = 42.4 \text{ MPa} \quad ۱۰$$

مثال ۱۶) دو میله استوانه‌ای توپیر AB و BC در B به هم جوش داده شده‌اند و مطابق شکل زیر

بارگذاری شده‌اند. با این اطلاع که میانگین تنش قائم باید از 175 MPa در میله AB و 150 MPa در میله

BC بیشتر نشود کمترین مقدار برای d_1 و d_2 را تعیین کنید. (شکل مثال قبل)

میله AB : $P = 40 + 30 = 70 \text{ kN} = 70 \times 10^3 \text{ N}$

$$\sigma_{AB} = \frac{P}{A_{AB}} = \frac{P}{\frac{\pi}{4} d_1^2} = \frac{4P}{\pi d_1^2} \rightarrow d_1 = \sqrt{\frac{4P}{\pi \sigma_{AB}}} = \sqrt{\frac{4 \times 70 \times 10^3}{\pi \times 175 \times 10^6}}$$

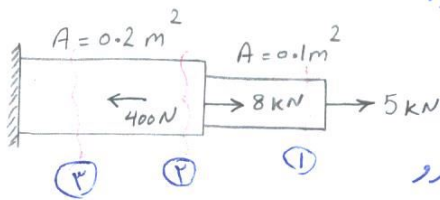
$$\rightarrow d_1 = 22.6 \times 10^{-3} \text{ m} = 22.6 \text{ mm}$$

میله BC : $P = 30 \text{ kN} = 30 \times 10^3 \text{ N}$

$$\sigma_{BC} = \frac{P}{A_{BC}} = \frac{P}{\frac{\pi}{4} d_2^2} = \frac{4P}{\pi d_2^2} \rightarrow d_2 = \sqrt{\frac{4P}{\pi \sigma_{BC}}} = \sqrt{\frac{4 \times 30 \times 10^3}{\pi \times 150 \times 10^6}}$$

$$\rightarrow d_2 = 15.96 \times 10^{-3} \text{ m} = 15.96 \text{ mm}$$

مثال ۱۷ در شکل زیر تنش را در قسمت های مختلف به دست آورید.



نکته: زمانی تنش تغییر می کند که یا سطح مقطع تغییر کند یا نیرو

$$P_1 = 5 \text{ kN}$$

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A} = \frac{5 \times 10^3}{0.1} = 5 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 50 \text{ kPa}$$

$$P_2 = 13 \text{ kN}$$

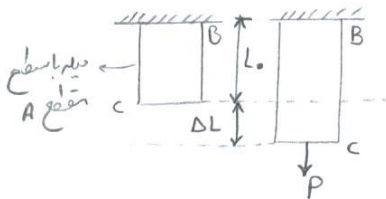
$$\sigma_2 = \frac{P_2}{A} = \frac{13 \times 10^3}{0.2} = 6.5 \times 10^4 = 65 \text{ kPa}$$

$$P_3 = 12600 \text{ N}$$

$$\sigma_3 = \frac{P_3}{A} = \frac{12600}{0.2} = 63 \times 10^4 = 63 \text{ kPa}$$

- مفهوم کرنش: کرنش یا محوری ایجاد شده در یک عضو

سیله را مطابق شکل زیر را در نظر بگیرید. با اعمال نیروی P بر این وسیله، طول آن به اندازه ΔL افزایش می یابد



$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{\delta}{L}$$

تذکره: در شکل فوق اگر نیروی P را به تدریج افزایش داده و مقادیر تنش و کرنش را به ازای مقادیر مختلف

P می سنجیم و در یک نمودار رسم کنیم، نمودار تنش - کرنش به شکل ساده مورد نظر به دست می آید که از نمودار

بسیار مهم تر مصالح خوب می شود. این آزمایش، آزمایش کشش مستقیم نام داشته

و از آن به این لحاظ مهم مقاومت مصالح خوب می شود. در قسمت بعد به بررسی نمودار تنش - کرنش

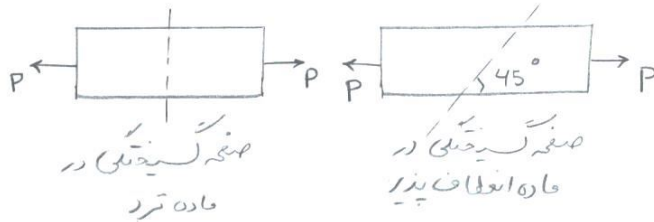
فولاد نرم و قفالی می پردازیم.

تذکره ۲: در صورتی که جسم تحت اثر نیروی کشش قرار گیرد، در راستای نیرو افزایش طول داشته و

کرنش نرمال در آن راستا مثبت است. از طرفی در صورتی که عضو تحت اثر نیروی فشار قرار گیرد،

گامش طول داشته و کرنش نرمال همان راستا مستقیم است.

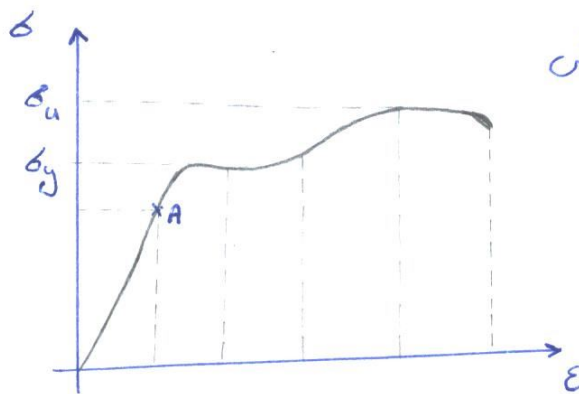
تذکره ۳: مواد به طور کلی به دو دسته ترد (Brittle) و انعطاف پذیر (Ductile) تقسیم می شوند. مواد ترد مانند بتن در تحمل کشش ضعف داشته و مواد انعطاف پذیر مانند فولاد در تحمل برش ضعف دارند و صفحات گسیختگی آنها را از مایش کشش مستقیم مانند شکل زیر است:



- بررسی منحنی تنش - کرنش در فولاد نرمه ساختمانی

بهتر ترسیم منحنی تنش - کرنش نیاز به نمونه آزمون مایع‌هاست. بر روی این نمونه‌ها به طور معمول آزمایش کشش انجام می گیرد. نتایج نشان می دهد که منحنی های تنش - کرنش مصالح مختلف، که از آزمون کشش به دست می آیند، تفاوت زیادی با یکدیگر دارند. حتی بهر یک نوع مصالح نیز در شرایط مختلف آزمون مایع‌ها، نتایج متفاوت دارند. با این حال، می توان در میان نمودارهای تنش - کرنش گروه های مختلف مواد، مشخصه مشترکی را تشخیص داد و برابر این مشخصه ها مواد را به دو گروه بزرگ فولاد شل پذیر و شکننده تقسیم کرد. مواد شل پذیر، که فولاد سازه و بسیاری از آلیاژهای فلزی دیگر از آن جمله اند، با قابلیت تسلیم در حالت عادی مشخص می شوند. وقتی که نمونه در معرض بار افزایش یافته قرار می گیرد، ابتدا طولش به طور خطی و با آهنگی بسیار آهسته، با بار افزایش می یابد. بنابراین تحت اولیه منحنی تنش - کرنش خط راستی باشد. کند است. اما بعد از رسیدن تنش به مقدار بحرانی (یا σ_y)، نمونه با افزایش نسبتاً کم بار اعمال شده، تغییر شکل زیادی می دهد. این تغییر شکل در اثر تغییر در مقدار سطوح مایل به وجود می آید، و بنابراین

محدودناش از تنش σ_u برش است. افزایش طول نمونه پس از شروع تسلیم، می تواند ۲۰۰ برابر تغییر شکل آن در قبل از تسلیم باشد. بعد از رسیدن بار به یک ماکزیمم معین، قطر متغیر از نمونه در اثر ناپایداری موضعی شروع به کاهش می کند. این پدیده را بارگی شدن می نامند. پس از شروع بارگی شدن بار نسبتاً کمتری می تواند افزایش طول بیشتری در نمونه به وجود بیاورد در نهایت نمونه می گسلد.

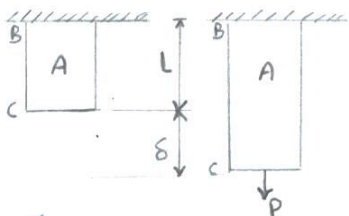


نقطه A که در انتهای مسیر خطی منحنی تنش-کرنش قرار دارد را حد خطی مصالح می نامند. در این قسمت نمودار

تنش σ مستقیماً با کرنش ϵ متناسب است و می توانیم

$$\sigma = E \epsilon$$

این رابطه به قانون هوک معروف است. ضریب E را مدول کشسانی ماده مورد نظر می نامند. گاه ضریب کشسانی را مدول یانگ نیز می نامند. از آنجا که کرنش ϵ کمیت بدون بعد است، مدول E با همان یکاهایی تنش σ بیان می گردد.



تغییر شکل عضوها در بارگذاری محوری

میدان هگن BC به طول L و به مساحت سطح مقطع یکنواخت A را در نظر بگیرید که تحت تأثیر بار محوری مرکزی P است. اگر تنش محوری حاصل $\sigma = \frac{P}{A}$ از حد تناسب ماده تجاوز نکند، می توانیم قانون هوک را

$$\sigma = E \epsilon \quad \text{به کار ببریم و بنویسیم:} \quad \text{که از آن نتیجه می شود که:} \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$$

باید آوردن اینکه ϵ کرنش را در بخش قبل به صورت $\epsilon = \frac{\delta}{L}$ تعریف کردیم، داریم:

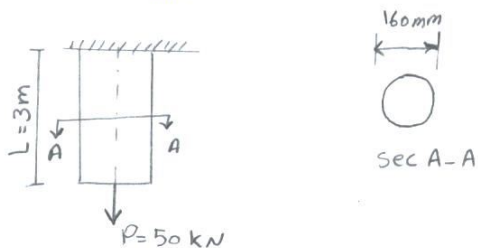
$$\delta = \epsilon L \rightarrow \delta = \frac{PL^*}{AE}$$

معادله بالا را فقط وقتی می توان به کار برد که میدان هگن (یا E ثابت) باشد، و سطح مقطع یکنواختی

به مساحت A داشته باشد، و بار به دوسر آن وارد بشود. اگر بار به نقاط دیگری از میله وارد بشود، یا اگر میله از قسمت های مختلف با مقطع های متفاوت و اقلاما مواد متفاوت تشکیل شده باشد، باید آن را به قسمت های کوچکتری تقسیم کنیم که هر کدام به تنهایی شرایط لازم بهر کار برر معادله بالا را داشته باشند. اگر نیروی داخلی، طول، مساحت سطح مقطع، و مدول کشسانی مربوط به قسمت i را به ترتیب با P_i ، L_i ، A_i و E_i نشان بدهیم، می توانیم تغییر شکل کل میله را به این صورت بنویسیم:

$$\delta = \sum_{i=1}^n \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$

مثال ۱) مطلوب است می سب تغییر شکل میله فولادی مطابق شکل، در صورتی که $E = 2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ باشد.



(از وزن میله صرف نظر شود).

حل: $L = 3\text{m} = 3000\text{mm}$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4} \times 160^2 = 20096\text{mm}^2$$

$$P = +50\text{kN} = +50000\text{N}$$

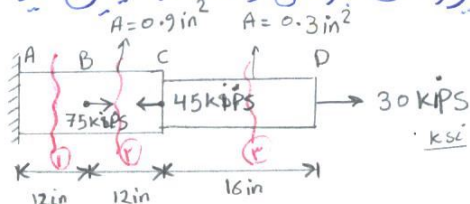
علامت + ← بار کشش

$$E = 2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$\Delta L = \delta = ?$$

$$\delta = \frac{PL}{AE} = \frac{50000 \times 3000}{20096 \times 2.1 \times 10^5} = 3.55 \times 10^{-2} \text{ mm} = 0.0355\text{mm}$$

مثال ۲) تغییر شکل میله فولادی نشان داده شده در شکل زیر را محاسبه کنید. بارهای داده شده تقسیم کنید.



$$(E = 29 \times 10^6 \text{ PSI})$$

$$P_1 = 60 \text{ kips} = 60 \times 10^3 \text{ lb}$$

$$P_2 = -15 \text{ kips} = -15 \times 10^3 \text{ lb}$$

$$P_3 = 30 \text{ kips} = 30 \times 10^3 \text{ lb}$$

$$P_3 \leftarrow \boxed{} \rightarrow 30 \text{ kips}$$

$$P_2 \leftarrow \boxed{} \rightarrow 30 \text{ kips}$$

$$P_1 \leftarrow \boxed{} \rightarrow 30 \text{ kips}$$

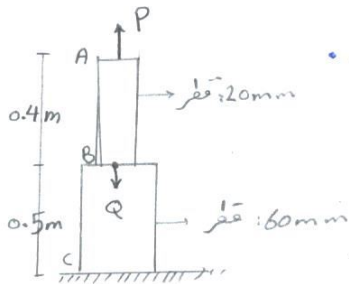
$$\delta = \sum_{i=1}^3 \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E} \left(\frac{P_1 L_1}{A_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2} + \frac{P_3 L_3}{A_3} \right) \rightarrow$$

$$\delta = \frac{1}{29 \times 10^6} \left[\frac{(60 \times 10^3) \times 12}{0.9} + \frac{(-15 \times 10^3) \times 12}{0.9} + \frac{(30 \times 10^3) \times 16}{0.3} \right]$$

$$\rightarrow \delta = \frac{2.2 \times 10^6}{29 \times 10^6} = 75.9 \times 10^{-3} \text{ in}$$

مثال ۳) میل ABC از آلومینیوم ساخته شده که بهر آن $E = 70 \text{ GPa}$ است. بالین فرض که $P = 6 \text{ kN}$

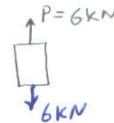
و $Q = 42 \text{ kN}$ است، الف) اغراف نقطه A و ب) اغراف نقطه B را تعیین کنید.



$$A_{AB} = \frac{\pi}{4} d_{AB}^2 = \frac{\pi}{4} (0.02)^2 = 314.16 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$A_{BC} = \frac{\pi}{4} d_{BC}^2 = \frac{\pi}{4} (0.06)^2 = 2.8274 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$P_{AB} = P = 6 \times 10^3 \text{ N}$$



$$P_{BC} = P - Q = 6 \times 10^3 - 42 \times 10^3 = -36 \times 10^3 \text{ N}$$



$$L_{AB} = 0.4 \text{ m}, \quad L_{BC} = 0.5 \text{ m}$$

$$\delta_{AB} = \frac{P_{AB} L_{AB}}{A_{AB} E} = \frac{(6 \times 10^3) \times 0.4}{(3.1416 \times 10^{-6}) \times (70 \times 10^9)} = 109.135 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$\delta_{BC} = \frac{P_{BC} L_{BC}}{A_{BC} E} = \frac{(-36 \times 10^3) \times (0.5)}{(2.8274 \times 10^{-3}) \times (70 \times 10^9)} = -90.947 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$\text{الف) } \delta_A = \delta_{AB} + \delta_{BC} = 109.135 \times 10^{-6} - 90.947 \times 10^{-6} = 18.19 \times 10^{-6} \text{ m} = 0.01819 \text{ mm} \uparrow$$

$$\text{ب) } \delta_B = \delta_{BC} = -90.9 \times 10^{-6} \text{ m} = -0.0909 \text{ mm} \downarrow$$

مثال ۴) میلار به طول ۵۰۰ میلی متر و قطر ۱۶ میلی متر که از مصالح هگن و اینز و شروپ ساخته شده است، زیر اثر نیروی محوری ۲۴ کیلو نیوتن در یک انتهای خود قرار می گیرد. انتهای دیگر آن نیز به تکیه گاه ثابت شده است. در اثر اعمال این نیرو طول میل به اندازه ۰.۳ میلی متر افزایش یافته و از قطر آن به مقدار ۰.۰۰۲۴ میلی متر کاهش می شود. مطلوب است تعیین ضریب کشسانی (E) بهر مصالح میل.

$$\text{حل: } A = \frac{\pi d^2}{4} = \pi \times \frac{16^2}{4} = 201 \text{ mm}^2$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{24000}{201} = 119.4 \text{ N/mm}^2$$

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{0.3}{500} = 600 \times 10^{-6}$$

$$\sigma = E \epsilon \rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{119.4}{600 \times 10^{-6}} = 1.99 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

نیروی برشی (مماسی)

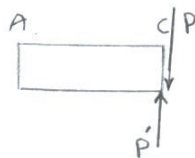
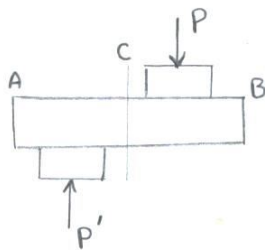
اگر اثر بار خارجی یا برآیند آن‌ها، بر سطح مقطع عضو مماس باشد به آن نیروی برشی یا مماس گفته می‌شود. در این قسمت سطح مقطع مورد نظر است که عمود بر محور طولی عضو باشد.

تشنش ناشی از نیروهای برشی

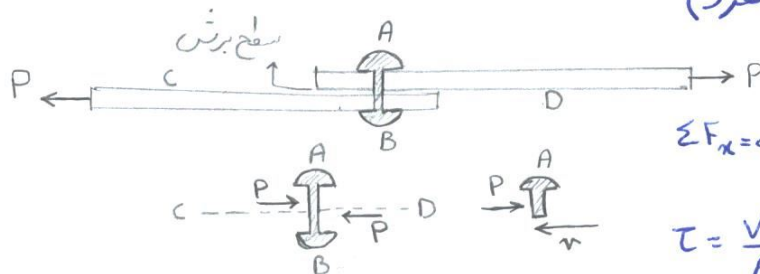
اگر نیروهای P و P' به صورت عرضی به یک عضو AB وارد شوند نوع بسیار متفاوتی از تشنش محوری خواهیم داشت. باید بدانیم قاطع از میان نقاط اثر رویرود در C ، عموداً قسمت AC را که در شکل نشان داده شده است به دست می‌آوریم. نتیجه می‌گیریم که در صغه مقطع حاصل باید نیروهای داخلی داشته باشیم و نتیجه می‌گیریم که برآیند این نیروها برابر با P است. این نیروهای داخلی جزئی را نیز در برشی می‌نامند، و مقدار P برآیند آن‌ها برابر با برشی در این مقطع است. از تقسیم برشی P بر مساحت A ی مقطع، میانگین تشنش برشی در مقطع را به دست می‌آوریم. تشنش برشی را با حرف یونانی τ (تاو) نشان می‌دهیم.

$$\tau_{ave} = \frac{P}{A}$$

مقدار به دست آمده، مقدار میانگین تشنش برشی در کل مقطع است. تشنش برشی معمولاً در پیچ‌ها، پین‌ها و پرچ‌هایی بروز می‌کند که بجز اتصال عضوهای مختلف بارها و اجزای ماشین به کار می‌روند.



برش ساده (متفرد)



$$\sum F_x = 0 \rightarrow V - P = 0 \rightarrow V = P$$

$$\tau = \frac{V}{A} \text{ و } A = \frac{\pi d^2}{4}$$

d : قطر پیچ

برش مفاعف



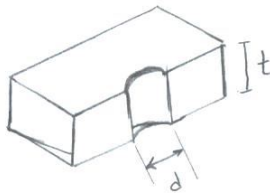
$$\sum F_x = 0 \rightarrow V + V = P \rightarrow V = \frac{P}{2}$$

$$\tau = \frac{V}{A} = \frac{V}{A} = \frac{P/2}{A} = \frac{P}{2A}$$

تنش تکیه گاه (لجیدی)

پیچ ها، بین ها و پرچ ها در عضو هایی که به هم اتصال می دهند، تنش هایی در امتداد سطح تکیه گاه یا سطح تماس آن ها ایجاد می کنند که تنش تکیه گاه (لجیدی) نامیده می شود و از تقسیم بار بر مساحت متقابل نماینده تصویر پیچ بر روی مقطع به دست می آید (مثل زیر). این مساحت برابر با td است، که در آن t ضخامت ورق و d قطر پیچ است:

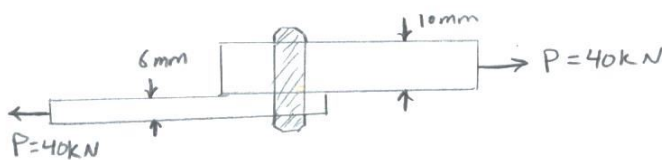
$$\sigma_b = \frac{P}{A} = \frac{P}{td}$$



مثال ۱) دو تسمه به وسیله پرچ به قطر ۲۰ میلی متر، مطابق شکل زیر، به هم متصل شده اند. اگر نیروی کشش تسمه ها ۴۰ kN باشد، مطلوب است: الف) ضریب تنش در تسمه ها، ب)

ج) ضریب تنش در پرچ

ج) ضریب تنش لجیدی در تسمه ها



$$P = 40 \text{ kN} = 40 \times 10^3 \text{ N}$$

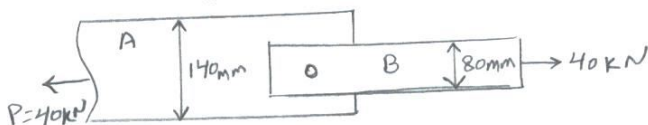
$$d = 20 \text{ mm}$$

$$b_A = 140 \text{ mm}$$

$$t_A = 6 \text{ mm}$$

$$b_B = 80 \text{ mm}$$

$$t_B = 10 \text{ mm}$$



الف) $A_A = (140 - 20) \times 6 = 720 \text{ mm}^2$: سطح خالص تسمه A

تشنه در تسمه A : $\sigma_A = \frac{P_A}{A_A} = \frac{40 \times 10^3}{720} = 55.56 \text{ N/mm}^2 = 55.56 \text{ MPa}$

سطح خالص تسمه B : $A_B = (80 - 20) \times 10 = 600 \text{ mm}^2$

$\sigma_B = \frac{P_B}{A_B} = \frac{40 \times 10^3}{600} = 66.67 \text{ N/mm}^2$

ب) $A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3.14 \times 20^2}{4} = 314 \text{ mm}^2$

$\tau = \frac{P}{A} = \frac{40 \times 10^3}{314} = 127.39 \text{ N/mm}^2$

ج) $(\sigma_b)_A = \frac{40 \times 10^3}{20 \times 6} = 333.33 \text{ N/mm}^2$

$(\sigma_b)_B = \frac{P}{t_B d} = \frac{40 \times 10^3}{20 \times 10} = 200 \text{ N/mm}^2$

تشنه وارد بر صفحه مایل تحت بارگذاری محوری

عضو نیروی شکل زیر را که تحت تأثیر نیروهای P و P' قرار دارد، در نظر بگیرید. اگر فرض کنیم که با صفحه قائم زاویه θ باز و نمودار جسم آزاد سمتی از عضو مورد نظر را که در سمت چپ مقطع حاصل قرار می‌گیرد رسم کنیم، از شرایط تعادل جسم آزاد نتیجه می‌گیریم که نیروهای توزیع شده وارد بر مقطع باید معادل نیروی P باشند. با تجزیه P به مولفه‌های F و V، که به ترتیب، عمود و عاقل بر مقطع هستند، داریم:

$$F = P \cos \theta$$

$$V = P \sin \theta$$

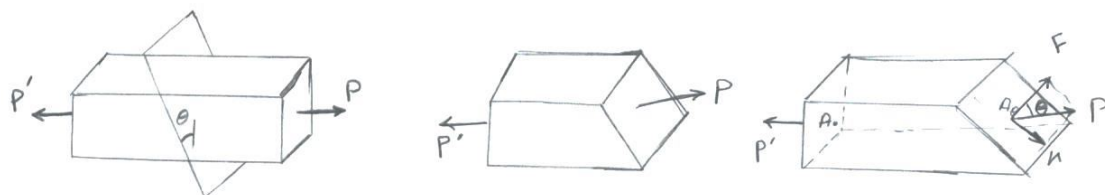
شکل صفحه بعد

نیروی F نماینده برآیند نیروی قائم توزیع شده روی مقطع، و نیروی V برآیند نیروی برشی است.

مقادیر بیشترین تشنهای قائم و برشی متناظر با این نیروها به ترتیب از تقسیم F و V بر مساحت A_θ بدست می‌آید:

$$\sigma = \frac{F}{A_\theta} \quad \tau = \frac{V}{A_\theta} \quad \text{و} \quad A_\theta = A_0 / \cos \theta$$

$$\rightarrow \sigma = \frac{P \cos \theta}{A_0 / \cos \theta} = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta \quad , \quad \tau = \frac{P \sin \theta}{A_0 / \cos \theta} = \frac{P}{A_0} \cos \theta \sin \theta$$



بار مجاز و تنش مجاز، ضریب ایمنی

هدف از طراحی یک سازه، دستیابی به یک ساختار بهینه است که بتواند با تأمین ایمنی کامل و رعایت مباحث اقتصادی پروژه، مقهور خاص را برآورده کند. به طور مثال هدف از طراحی سازه یک ساختمان این است که هندسه مناسب به سازه به دست آید و مقاومت اعضای تشکیل دهنده آن به گونه ای باشد که در مقابل بار وارده پایداری خود را حفظ کند. طراحی سازه ها به روش گوناگونی صورت می گیرد. از جمله می توان به روش تنش مجاز، مقاومت مجاز و روش ضرایب بار و مقاومت اشاره کرد.

از آنجاکه سازه ها با آسودگی خیال بار وارده را تحمل نموده و هیچ خرابی در آنها اتفاق نیفتد، در روش تنش مجاز، بارهای ربه ضریبی کمتر از یک تقسیم نموده و نتیجه را بار مجاز می نامند. این ضریب را ضریب ایمنی می نامند و آن را با $F.S.$ نشان می دهند.

$$\text{ضریب ایمنی} = \frac{\text{بار مجاز}}{\text{بار محاسباتی}} \quad F.S. = \frac{P_u}{P_{allow}} \quad \text{یا} \quad P_a = \frac{P_u}{F.S.}$$

ضریب ایمنی را با استفاده از تنش هم تعریف می کنند:

$$\text{ضریب ایمنی} = \frac{\text{تنش مجاز}}{\text{تنش محاسباتی}} \quad F.S. = \frac{\sigma_u}{\sigma_a} \quad \text{یا} \quad \sigma_a = \frac{\sigma_u}{F.S.}$$

دلایل به کارگیری ضریب ایمنی

به طور کلی می توان به عوامل مهم زیر که در به کارگیری ضریب ایمنی نقش دارند اشاره کرد:

۱- مصالح به کار رفته در عضو ممکن است ناقصه داشته باشند.

۲- بارگذاری بیش از حد پیش بینی شده باشد.

۳- کش آمدن بیش از حد مجاز مصالح

۴- خوردگی مصالح

۵- تغییر شکل غیر قابل برگشت دائمی

۶- بارگذاری متناوب

۷- وجود مشکلات اجرایی در زمینه مونتاژ و نصب اعضای سازه توسط اتصالات

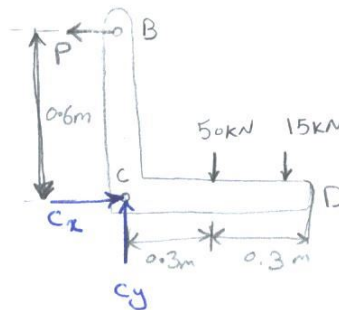
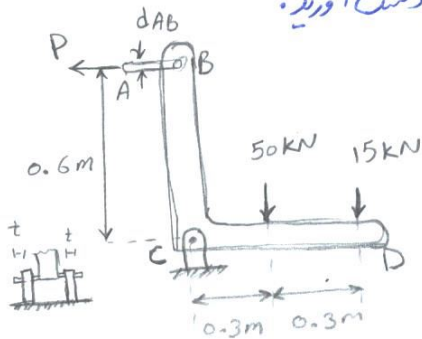
مثال (دو نیرو مطابق شکل زیر بر پایه BCD وارد می شود. الف) با این فرض که میل کنترل AB باید از فولادی

با تنش قائم نهایی 600 MPa ساخته شود، قطر میل را طوری تعیین کنید که ضریب ایمن نسبت به شکست

3.3 باشد. ب) پین واقع در C باید از فولادی با تنش برش نهایی 350 MPa ساخته شود. قطر پین

C را طوری تعیین کنید که ضریب ایمن آن نسبت به برش هم 3.3 باشد. ج) با این فرض که تنش گسیل ماهر

مجاز فولاد به کار رفته 300 MPa است، مقاومت لازم گسیل ماهرهای پایه در C را به دست آورید.



$$\sum \mathcal{M}_C = 0 \rightarrow P(0.6) -$$

$$(50 \times 0.3) - (15 \times 0.6) = 0 \rightarrow$$

$$P = 40 \text{ kN}$$

$$\sum \mathcal{F}_x = 0 \rightarrow C_x - P = 0 \rightarrow C_x = P = 40 \text{ kN}$$

$$\sum \mathcal{F}_y = 0 \rightarrow C_y - 50 - 15 = 0 \rightarrow C_y = 65 \text{ kN}$$

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = 76.3 \text{ kN}$$

$$\text{الف) } \sigma_{all} = \frac{\sigma_u}{F.S.} = \frac{600}{3.3} = 181.8$$

$$\sigma_{موجود} \leq \sigma_{all} \rightarrow \sigma_{موجود} = \frac{P}{A} \leq \sigma_{all} \rightarrow A \geq \frac{P}{\sigma_{all}}$$

$$A_{\text{لازم}} = \frac{P}{\sigma_{\text{all}}} = \frac{40 \times 10^3}{181.8} = 220 \text{ mm}^2$$

$$A_{\text{لازم}} = \frac{\pi d_{AB}^2}{4} = 220 \rightarrow d_{AB} = 16.74 \text{ mm}$$

$$\text{ب) } \tau_{\text{all}} = \frac{\tau_u}{F.S.} = \frac{350}{3.3} = 106.1 \text{ MPa}$$

$$\text{برش منصف : } A_{\text{لازم}} = \frac{C_{12}}{\tau_{\text{all}}} = \frac{76.3/2}{106.1} = 360 \text{ mm}^2$$

$$A_{\text{لازم}} = \frac{\pi d_c^2}{4} = 360 \rightarrow d_c = 21.4 \text{ mm}$$

اولین اندازه موجود پس به قطر 22mm است که باید همان را به کار برد.

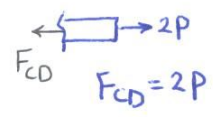
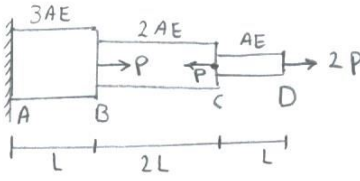
ج) با استفاده از $d = 22 \text{ mm}$ ، مساحت اسمی تکیه گاه‌های هر یک از پایه ها 22t است.

از آنجا که نیروی وارد بر هر یک از پایه ها C_{12} و تنش مجاز تکیه گاه 300MPa است:

$$A_{\text{لازم}} = \frac{C_{12}}{\sigma_{\text{all}}} = \frac{(76.3 \times 10^3)/2}{300} = 127.2 \text{ mm}^2$$

$$t \overset{22}{d} = 127.2 \rightarrow t = 5.78 \text{ mm}$$

مثال ۱ در شکل مقابل تغییر مکان انتهای میل (نقطه D) چقدر است؟



$$\Delta_{CD} = \left(\frac{PL}{AE}\right)_{CD} = \frac{2PL}{AE}$$

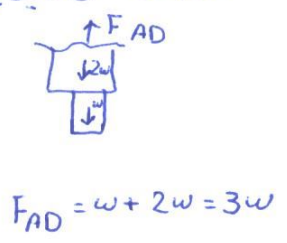
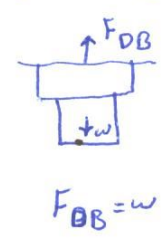
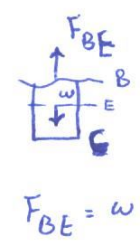
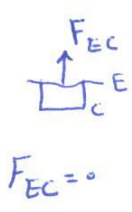
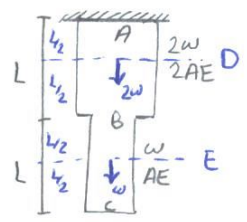
$$\Delta_{BC} = \left(\frac{PL}{AE}\right)_{BC} = \frac{P(L \times 2)}{2AE} = \frac{PL}{AE}$$

$$\Delta_{AD} = \Delta_D = \Delta_{CD} + \Delta_{BC} + \Delta_{AB}$$

$$\Delta_{AB} = \left(\frac{PL}{AE}\right)_{AB} = \frac{2P \times L}{3AE} = \frac{2PL}{3AE}$$

$$\Delta_D = \frac{2PL}{AE} + \frac{PL}{AE} + \frac{2PL}{3AE} = \frac{11PL}{3AE}$$

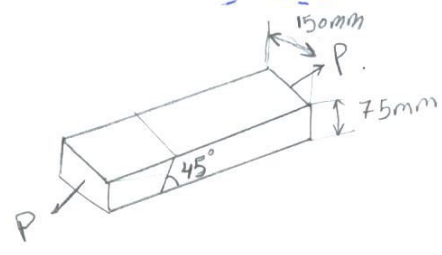
مثال ۲ در شکل زیر تغییر مکان انتهای میل (نقطه C) تحت اثر وزن آن چقدر است؟



$$\Delta_C = \Delta_{EC} + \Delta_{BE} + \Delta_{DB} + \Delta_{AD} = 0 + \frac{w \times L/2}{AE} + \frac{w \times L/2}{2AE} + \frac{3w \times L/2}{2AE} = \frac{3wL}{2AE}$$

مثال ۳ در عنصر چوبی که سطح مقطع مستطیلی بکند افقی دارند مطابق شکل زیر از ماده فارسی برهم چنانچه

شده اند. اگر $P = 11 \text{ kN}$ باشد تنش های قائم و برش را در ماده چوب خورده تعیین کنید.



$$\theta = 90 - 45 = 45^\circ$$

$$P = 11 \text{ kN} = 11 \times 10^3 \text{ N}$$

$$A_0 = 150 \times 75 = 11.25 \times 10^3 \text{ mm}^2 = 11.25 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta = \frac{11 \times 10^3}{11.25 \times 10^{-3}} \times \cos^2 45 = 489 \times 10^3 \text{ Pa}$$

$$\tau = \frac{P}{A_0} \sin \theta \cos \theta = \frac{11 \times 10^3}{11.25 \times 10^{-3}} \times \sin 45 \cos 45 = 489 \times 10^3 \text{ Pa}$$

مثال) دو عضو چوبی که سطح مقطع مستطیلی یکنواختی دارند مطابق شکل مسئله قبل از ناحیه فارسی بر به هم چسبانده شده اند. با این اطلاع که حداکثر تنش برشی مجاز در ناحیه چوب خورده برابر با 620 kPa است، الف) بیشترین مقدار بار قابل اعمال P و ب) تنش کشش متناظر در ناحیه اتصال را تعیین کنید.

$$\theta = 90 - 45 = 45^\circ$$

$$A_0 = 11.25 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \quad , \quad \tau = 620 \text{ kPa} = 620 \times 10^3 \text{ Pa}$$

$$\tau = \frac{P}{A_0} \sin \theta \cos \theta \rightarrow P = \frac{\tau A_0}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{620 \times 10^3 \times 11.25 \times 10^{-3}}{\cos 45 \sin 45} = 13.95 \times 10^3 \text{ N}$$

$$\text{ب) } \sigma = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta = \frac{13.95 \times 10^3}{11.25 \times 10^{-3}} \times \cos^2 45 = 620 \times 10^3 \text{ Pa}$$

بررسی اثر پواسون در یک ماده انیزوتروپ

در بحث کمر قبلی دیدیم که وقتی سیم هگلی مارپیچی تحت بارگذاری محوری قرار می‌گیرد، تا وقتی که تنش از حد کشسانی ماده تجاوز نکند، تنش و کرنش حاصل، از قانون هوک تبعیت می‌کنند. با فرض اینکه

بار P در امتداد محور x باشد، داریم $\epsilon_x = \frac{P}{A E}$ که در آن A مساحت مقطع سیم

است و از قانون هوک داریم: $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ که در آن، E مدول کشسانی

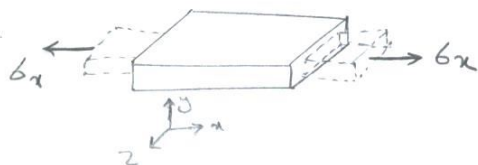
ماده است.

در شکل زیر یک مکعب مستطیل تحت تنش σ_x در راستای طولی قرار گرفته و در جهت محور x دچار افزایش

طول می‌شود. مطابق اثر پواسون این ماده در جهت x دچار افزایش طول و در جهت‌های جانبی y و z

دچار کاهش طول می‌شود. قدر مطلق نسبت کرنش جانبی به کرنش طولی (در راستای نیرو) معادل

ضریب پواسون آن ماده می‌باشد. ($\epsilon_x > 0$ ، $\epsilon_y < 0$ ، $\epsilon_z < 0$)



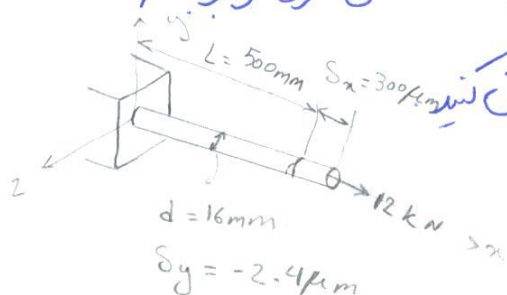
$$\nu = \left| \frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش طولی}} \right| = - \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} = - \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x}$$

$$\epsilon_z = -\nu \epsilon_x \text{ و } \epsilon_y = -\nu \epsilon_x$$

$$\text{طبق قانون هوک: } \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \text{ و } \epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}, \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

مثال: سیم‌ای به طول 500 mm و به قطر 16 mm که از ماده ارگن وماند ساخته شده است، وقتی

تحت بار محوری 12 kN قرار می‌گیرد، افزایش طولی برابر 300 μm و کاهش قطری برابر 2.4 μm



$$A = \pi r^2 = \pi (8 \times 10^{-3})^2 = 201 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{12 \times 10^3}{201 \times 10^{-6}} = \text{~~120000~~ } 59.7 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{300 \times 10^3 \times 10^{-6}}{500} = 600 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{-2.4 \times 10^3 \times 10^{-6}}{16} = -150 \times 10^{-6}$$

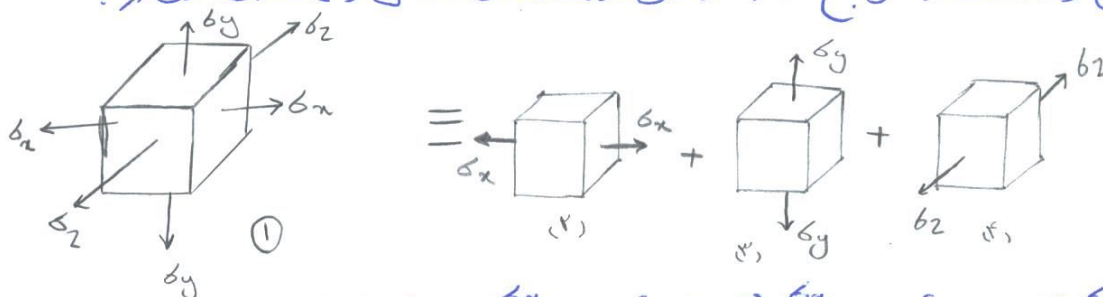
$$\sigma_x = E \epsilon_x \rightarrow E = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} = \frac{59.7}{600 \times 10^{-6}} = 99.5 \text{ GPa}$$

$$\nu = - \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = \frac{-150 \times 10^{-6}}{600 \times 10^{-6}} = 0.25$$

قانون همبستگی

در شکل زیر یک عنصر در سه راستای x، y و z تحت تنش های σ_x ، σ_y و σ_z قرار دارد. با توجه به خطیت

پواسون، رابطه از اصل جمع آثار، کرنش در راستای x، y و z عبارت است از:



$$\text{در (۱) : } \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \text{ و } \epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \text{ و } \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\text{در (۲) : } \epsilon_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E} \text{ و } \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \text{ و } \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\text{در (۳) : } \epsilon_x = -\nu \frac{\sigma_z}{E} \text{ و } \epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E} \text{ و } \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

در این ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴۶۰، ۴۶۱، ۴۶۲، ۴۶۳، ۴۶۴، ۴۶۵، ۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۰، ۴۷۱، ۴۷۲، ۴۷۳، ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲، ۴۸۳، ۴۸۴، ۴۸۵، ۴۸۶، ۴۸۷، ۴۸۸، ۴۸۹، ۴۹۰، ۴۹۱، ۴۹۲، ۴۹۳، ۴۹۴، ۴۹۵، ۴۹۶، ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱، ۵۰۲، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵، ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۰۸، ۵۰۹، ۵۱۰، ۵۱۱، ۵۱۲، ۵۱۳، ۵۱۴، ۵۱۵، ۵۱۶، ۵۱۷، ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۰، ۵۲۱، ۵۲۲، ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۵، ۵۲۶، ۵۲۷، ۵۲۸، ۵۲۹، ۵۳۰، ۵۳۱، ۵۳۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۵۳۵، ۵۳۶، ۵۳۷، ۵۳۸، ۵۳۹، ۵۴۰، ۵۴۱، ۵۴۲، ۵۴۳، ۵۴۴، ۵۴۵، ۵۴۶، ۵۴۷، ۵۴۸، ۵۴۹، ۵۵۰، ۵۵۱، ۵۵۲، ۵۵۳، ۵۵۴، ۵۵۵، ۵۵۶، ۵۵۷، ۵۵۸، ۵۵۹، ۵۶۰، ۵۶۱، ۵۶۲، ۵۶۳، ۵۶۴، ۵۶۵، ۵۶۶، ۵۶۷، ۵۶۸، ۵۶۹، ۵۷۰، ۵۷۱، ۵۷۲، ۵۷۳، ۵۷۴، ۵۷۵، ۵۷۶، ۵۷۷، ۵۷۸، ۵۷۹، ۵۸۰، ۵۸۱، ۵۸۲، ۵۸۳، ۵۸۴، ۵۸۵، ۵۸۶، ۵۸۷، ۵۸۸، ۵۸۹، ۵۹۰، ۵۹۱، ۵۹۲، ۵۹۳، ۵۹۴، ۵۹۵، ۵۹۶، ۵۹۷، ۵۹۸، ۵۹۹، ۶۰۰، ۶۰۱، ۶۰۲، ۶۰۳، ۶۰۴، ۶۰۵، ۶۰۶، ۶۰۷، ۶۰۸، ۶۰۹، ۶۱۰، ۶۱۱، ۶۱۲، ۶۱۳، ۶۱۴، ۶۱۵، ۶۱۶، ۶۱۷، ۶۱۸، ۶۱۹، ۶۲۰، ۶۲۱، ۶۲۲، ۶۲۳، ۶۲۴، ۶۲۵، ۶۲۶، ۶۲۷، ۶۲۸، ۶۲۹، ۶۳۰، ۶۳۱، ۶۳۲، ۶۳۳، ۶۳۴، ۶۳۵، ۶۳۶، ۶۳۷، ۶۳۸، ۶۳۹، ۶۴۰، ۶۴۱، ۶۴۲، ۶۴۳، ۶۴۴، ۶۴۵، ۶۴۶، ۶۴۷، ۶۴۸، ۶۴۹، ۶۵۰، ۶۵۱، ۶۵۲، ۶۵۳، ۶۵۴، ۶۵۵، ۶۵۶، ۶۵۷، ۶۵۸، ۶۵۹، ۶۶۰، ۶۶۱، ۶۶۲، ۶۶۳، ۶۶۴، ۶۶۵، ۶۶۶، ۶۶۷، ۶۶۸، ۶۶۹، ۶۷۰، ۶۷۱، ۶۷۲، ۶۷۳، ۶۷۴، ۶۷۵، ۶۷۶، ۶۷۷، ۶۷۸، ۶۷۹، ۶۸۰، ۶۸۱، ۶۸۲، ۶۸۳، ۶۸۴، ۶۸۵، ۶۸۶، ۶۸۷، ۶۸۸، ۶۸۹، ۶۹۰، ۶۹۱، ۶۹۲، ۶۹۳، ۶۹۴، ۶۹۵، ۶۹۶، ۶۹۷، ۶۹۸، ۶۹۹، ۷۰۰، ۷۰۱، ۷۰۲، ۷۰۳، ۷۰۴، ۷۰۵، ۷۰۶، ۷۰۷، ۷۰۸، ۷۰۹، ۷۱۰، ۷۱۱، ۷۱۲، ۷۱۳، ۷۱۴، ۷۱۵، ۷۱۶، ۷۱۷، ۷۱۸، ۷۱۹، ۷۲۰، ۷۲۱، ۷۲۲، ۷۲۳، ۷۲۴، ۷۲۵، ۷۲۶، ۷۲۷، ۷۲۸، ۷۲۹، ۷۳۰، ۷۳۱، ۷۳۲، ۷۳۳، ۷۳۴، ۷۳۵، ۷۳۶، ۷۳۷، ۷۳۸، ۷۳۹، ۷۴۰، ۷۴۱، ۷۴۲، ۷۴۳، ۷۴۴، ۷۴۵، ۷۴۶، ۷۴۷، ۷۴۸، ۷۴۹، ۷۵۰، ۷۵۱، ۷۵۲، ۷۵۳، ۷۵۴، ۷۵۵، ۷۵۶، ۷۵۷، ۷۵۸، ۷۵۹، ۷۶۰، ۷۶۱، ۷۶۲، ۷۶۳، ۷۶۴، ۷۶۵، ۷۶۶، ۷۶۷، ۷۶۸، ۷۶۹، ۷۷۰، ۷۷۱، ۷۷۲، ۷۷۳، ۷۷۴، ۷۷۵، ۷۷۶، ۷۷۷، ۷۷۸، ۷۷۹، ۷۸۰، ۷۸۱، ۷۸۲، ۷۸۳، ۷۸۴، ۷۸۵، ۷۸۶، ۷۸۷، ۷۸۸، ۷۸۹، ۷۹۰، ۷۹۱، ۷۹۲، ۷۹۳، ۷۹۴، ۷۹۵، ۷۹۶، ۷۹۷، ۷۹۸، ۷۹۹، ۸۰۰، ۸۰۱، ۸۰۲، ۸۰۳، ۸۰۴، ۸۰۵، ۸۰۶، ۸۰۷، ۸۰۸، ۸۰۹، ۸۱۰، ۸۱۱، ۸۱۲، ۸۱۳، ۸۱۴، ۸۱۵، ۸۱۶، ۸۱۷، ۸۱۸، ۸۱۹، ۸۲۰، ۸۲۱، ۸۲۲، ۸۲۳، ۸۲۴، ۸۲۵، ۸۲۶، ۸۲۷، ۸۲۸، ۸۲۹، ۸۳۰، ۸۳۱، ۸۳۲، ۸۳۳، ۸۳۴، ۸۳۵، ۸۳۶، ۸۳۷، ۸۳۸، ۸۳۹، ۸۴۰، ۸۴۱، ۸۴۲، ۸۴۳، ۸۴۴، ۸۴۵، ۸۴۶، ۸۴۷، ۸۴۸، ۸۴۹، ۸۵۰، ۸۵۱، ۸۵۲، ۸۵۳، ۸۵۴، ۸۵۵، ۸۵۶، ۸۵۷، ۸۵۸، ۸۵۹، ۸۶۰، ۸۶۱، ۸۶۲، ۸۶۳، ۸۶۴، ۸۶۵، ۸۶۶، ۸۶۷، ۸۶۸، ۸۶۹، ۸۷۰، ۸۷۱، ۸۷۲، ۸۷۳، ۸۷۴، ۸۷۵، ۸۷۶، ۸۷۷، ۸۷۸، ۸۷۹، ۸۸۰، ۸۸۱، ۸۸۲، ۸۸۳، ۸۸۴، ۸۸۵، ۸۸۶، ۸۸۷، ۸۸۸، ۸۸۹، ۸۹۰، ۸۹۱، ۸۹۲، ۸۹۳، ۸۹۴، ۸۹۵، ۸۹۶، ۸۹۷، ۸۹۸، ۸۹۹، ۹۰۰، ۹۰۱، ۹۰۲، ۹۰۳، ۹۰۴، ۹۰۵، ۹۰۶، ۹۰۷، ۹۰۸، ۹۰۹، ۹۱۰، ۹۱۱، ۹۱۲، ۹۱۳، ۹۱۴، ۹۱۵، ۹۱۶، ۹۱۷، ۹۱۸، ۹۱۹، ۹۲۰، ۹۲۱، ۹۲۲، ۹۲۳، ۹۲۴، ۹۲۵، ۹۲۶، ۹۲۷، ۹۲۸، ۹۲۹، ۹۳۰، ۹۳۱، ۹۳۲، ۹۳۳، ۹۳۴، ۹۳۵، ۹۳۶، ۹۳۷، ۹۳۸، ۹۳۹، ۹۴۰، ۹۴۱، ۹۴۲، ۹۴۳، ۹۴۴، ۹۴۵، ۹۴۶، ۹۴۷، ۹۴۸، ۹۴۹، ۹۵۰، ۹۵۱، ۹۵۲، ۹۵۳، ۹۵۴، ۹۵۵، ۹۵۶، ۹۵۷، ۹۵۸، ۹۵۹، ۹۶۰، ۹۶۱، ۹۶۲، ۹۶۳، ۹۶۴، ۹۶۵، ۹۶۶، ۹۶۷، ۹۶۸، ۹۶۹، ۹۷۰، ۹۷۱، ۹۷۲، ۹۷۳، ۹۷۴، ۹۷۵، ۹۷۶، ۹۷۷، ۹۷۸، ۹۷۹، ۹۸۰، ۹۸۱، ۹۸۲، ۹۸۳، ۹۸۴، ۹۸۵، ۹۸۶، ۹۸۷، ۹۸۸، ۹۸۹، ۹۹۰، ۹۹۱، ۹۹۲، ۹۹۳، ۹۹۴، ۹۹۵، ۹۹۶، ۹۹۷، ۹۹۸، ۹۹۹، ۱۰۰۰

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

نوشت:

$$\epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

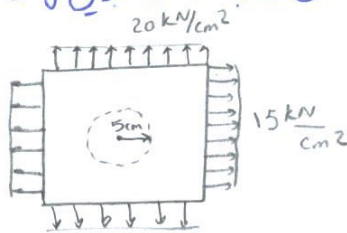
در روابط فوق تنش های کشش با علامت مثبت

$$\epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

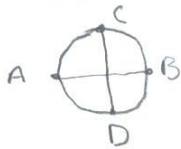
و تنش های فشاری با علامت منفی در روابط ظاهر

می شوند.

مثال ۱ ورقه به ابعاد $20 \times 20 \text{ cm}$ تحت تنش در دو راستای x و y قرار دارد. اگر دایره ای به قطر 10 cm را در مرکز این ورق رسم کنیم، پس از اعمال تنش ها این دایره به چه شکلی و با چه ابعادی تبدیل می شود؟



$$(E = 2 \times 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, \nu = 0.3)$$



قطرهای افقی و قائم دایره را به ترتیب برابر AB و CD در نظر می گیریم:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{15}{2 \times 10^4} - 0.3 \times \frac{20}{2 \times 10^4} - 0 = 4.5 \times 10^{-4}$$

$$\epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = -0.3 \times \frac{15}{2 \times 10^4} + \frac{20}{2 \times 10^4} - 0 = 7.75 \times 10^{-4}$$

طول قطرهای AB و CD در حالت جدید عبارت است از:

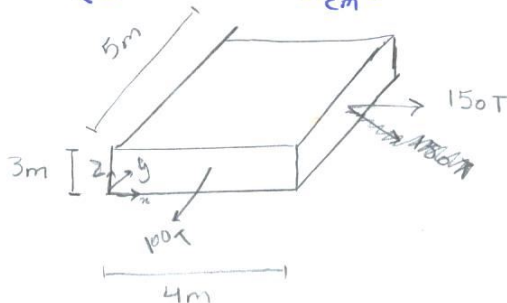
$$\epsilon_x = \frac{\Delta L_{AB}}{L_{AB}} \rightarrow \Delta L_{AB} = \epsilon_x \times L_{AB} = 4.5 \times 10^{-4} \times 10 \Rightarrow L'_{AB} = L_{AB} + \Delta L_{AB} = 10.00045 \text{ cm}$$

$$\epsilon_y = \frac{\Delta L_{CD}}{L_{CD}} \rightarrow \Delta L_{CD} = \epsilon_y \times L_{CD} = 7.75 \times 10^{-4} \times 10 \Rightarrow L'_{CD} = L_{CD} + \Delta L_{CD} = 10.00775 \text{ cm}$$

این دایره پس از اعمال تنش ها به یک بیضی با قطرهای 10.00045 cm و 10.00775 cm در راستای x و y تبدیل می شود.

مثال ۲ اتاق به شکل مکعب مستطیل به ارتفاع ۳ متر مطابق شکل زیر تحت نیرو قرار می گیرد. تغییر حجم اتاق بعد از وارد شدن نیروها چقدر است؟

$$(E = 2 \times 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}, \nu = 0.2)$$



$$\sigma_x = \frac{150 \times 10^3}{500 \times 300} = 1 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_y = \frac{100 \times 10^3}{400 \times 300} = 0.83 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_z = 0$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{2 \times 10^5} - 0.2 \times \frac{0.83}{2 \times 10^5} = 4.17 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = -0.2 \times \frac{1}{2 \times 10^5} + \frac{0.83}{2 \times 10^5} = 3.15 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} = -0.2 \times \frac{1}{2 \times 10^5} - 0.2 \times \frac{0.83}{2 \times 10^5} + 0 = -1.83 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_x = \frac{\Delta x}{L_x} \rightarrow \Delta x = \epsilon_x \times L_x \rightarrow \Delta x = 4.17 \times 10^{-6} \times 400 = 1.66 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

$$\epsilon_y = \frac{\Delta y}{L_y} \rightarrow \Delta y = \epsilon_y \times L_y = 3.15 \times 10^{-6} \times 500 = 1.57 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

$$\epsilon_z = \frac{\Delta z}{L_z} \rightarrow \Delta z = \epsilon_z \times L_z = -1.83 \times 10^{-6} \times 300 = -5.49 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

$$\text{طول ثانویه در راستای x: } L'_x = L_x + \Delta x = 400 + 1.66 \times 10^{-3} = 400.00166 \text{ cm}$$

$$\text{طول ثانویه در راستای y: } L'_y = L_y + \Delta y = 500 + 1.57 \times 10^{-3} = 500.00157 \text{ cm}$$

$$\text{طول ثانویه در راستای z: } L'_z = L_z + \Delta z = 300 - 5.49 \times 10^{-3} = 299.999 \text{ cm}$$

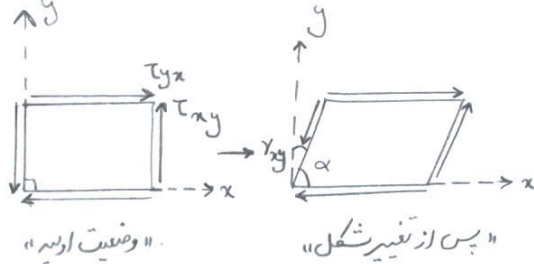
$$\text{حجم اولیه: } L_x \times L_y \times L_z = 60 \times 10^6 \text{ cm}^3$$

$$\text{حجم ثانویه: } L'_x \times L'_y \times L'_z = 60000237.4 \text{ cm}^3$$

آشنایی با مفهوم کرنش برشی

ایمانی مطابق شکل زیر را در نظر بگیرید. با وارد شدن تنش های برشی، زوایای این ایمان تغییر می کنند.

این حالت، زاویه گوشه پایین سمت چپ ایمان، از $\frac{\pi}{2}$ به α رسیده که به میزان این تغییر زاویه، کرنش



$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

برشی می گویند.

τ_{xy} : تنش برشی عمود بر محور x و در راستای محور y

τ_{yx} : تنش برشی عمود بر محور y و در راستای محور x

در محوره الاستیک، بین تنش کرنش برشی واقع در یک راستا و کرنش کرنش برشی (۲)، رابطه قطری برقرار بوده

$$\tau = G \gamma$$

و می توان نوشت:

G : مدول برشی ماده (مدول ملاییت)

γ : کرنش برشی بر حسب رادیان

و مدول برشی یک ماده بر حسب مدول الاستیسیته و ضریب پواسون ماده عبارت است از:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

مثال: میل به قطر 20mm را که از نوعی پلاستیک آزمایش ساخته شده است تحت نیروی کشش $P=6kN$ قرار

می دهیم. مشاهده می کنیم که در طول برابر با 150mm از میل، 14mm افزایش طول و 0.85mm کاهش

قطر به وجود آمده است. مدول کششی، مدول برشی و نسبت پواسون این ماده را تعیین کنید.

جواب: فرض کنید محور y در امتداد طول میل و محور x عرضی است.

$$A = \pi \frac{d^2}{4} = \frac{\pi}{4} \times (20)^2 = 314.16 \text{ mm}^2 = 314.16 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$P = 6 \times 10^3 \text{ N}$$

$$\sigma_y = \frac{P}{A} = \frac{6 \times 10^3}{314.16 \times 10^{-6}} = 19.0985 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$\epsilon = \frac{\delta y}{L} = \frac{14 \text{ mm}}{150 \text{ mm}} = 0.0933 \quad \text{و} \quad \epsilon_x = \frac{\delta x}{d} = -\frac{0.85}{20} = -0.0425$$

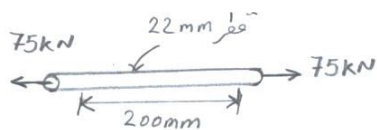
$$E = \frac{\sigma_y}{\epsilon_x} = \frac{19.0985 \times 10^6}{0.0933} = 204.63 \times 10^6 \text{ pa} \approx 205 \text{ Mpa}$$

$$\nu = - \frac{\epsilon_x}{\epsilon_y} = - \frac{-0.0425}{0.0933} = 0.455$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{204.63 \times 10^6}{2(1.455)} = 70.31 \times 10^6 \text{ pa} = 70.3 \text{ Mpa}$$

مثال، در یک آزمون کشش استاندارد، میله فولاد به قطر 22mm را تحت تأثیر نیروی کشش قرار می‌دهند.

اگر $\nu = 0.3$ و $E = 200 \text{ Gpa}$ باشد الف) افزایش طول میله در طول برابر 200mm بدست آورید. ب)



تغییر قطر میله را حساب کنید.

$$P = 75 \text{ kN} = 75 \times 10^3 \text{ N}$$

$$A = \pi \frac{d^2}{4} = \frac{\pi}{4} \times (0.022)^2 = 380.13 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{75 \times 10^3}{380.13 \times 10^{-6}} = 197.301 \times 10^6 \text{ pa} \quad / \delta$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma}{E} = \frac{197.301 \times 10^6}{200 \times 10^9} = 986.51 \times 10^{-6} \quad / \delta$$

$$\delta x = L \epsilon_x = 200 \times 986.51 \times 10^{-6} = 0.1973 \text{ mm} \quad / \delta$$

$$\epsilon_y = -\nu \epsilon_x = -(0.3)(986.51 \times 10^{-6}) = -295.95 \times 10^{-6} \quad / \delta \quad \text{ب)}$$

$$\delta y = d \epsilon_y = 22 \times (-295.95 \times 10^{-6}) = -0.00651 \text{ mm} \quad / \delta$$

گرفتگی حرارتی

در تمام عضوها و بازه‌هایی که تاریخچه در نظر گرفته ایم فرض بر این بود که در حین بارگذاری رفتار تغییر نمی‌کند. حالا می‌خواهیم

وضعیت‌هایی را بررسی کنیم که در آن‌ها رفتار تغییر می‌کند. ابتدا میله هگلی AB با سطح مقطع یکنواخت را در نظر می‌گیریم

که آزادانه روی سطح افقی قرار گرفته است. اگر دمای میله به اندازه ΔT بالا برود، طول میله به اندازه δ_T زیاد

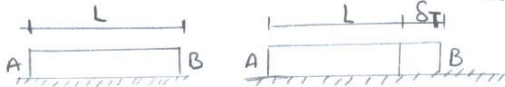
می‌شود که متناسب با تغییر دما ΔT و طول L میله است. داریم:

$$\delta_T = \alpha \Delta T L$$

که در آن α مقداری ثابت و از مشخصه ماده است، که به آن ضریب انبساط گرمایی (حرارتی) می‌گویند.

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} \rightarrow \epsilon_T = \frac{\delta_T}{L} = \alpha \Delta T \rightarrow \boxed{\epsilon_T = \alpha \Delta T}$$

گرفتگی ϵ_T را گرفتگی حرارتی می‌نامند، زیرا در اثر تغییر دمای میله به وجود می‌آید. در این حالت، تنش حرارتی



برابر صفر است.

حالا فرض می‌کنیم که همان میله AB به طول L بین دو تکیه‌گاه ثابت قرار دارد که در فاصله L از یکدیگر هستند.

در این حالت هم در شرایط اولیه گرفتگی و تنش نداریم. اگر دمای میله را به اندازه ΔT بالا ببریم، به علت قیودی

که در دو انتهای میله وجود دارند، میله نمی‌تواند افزایش طول پیدا کند، بنابراین افزایش طول δ_T میله صفر است.

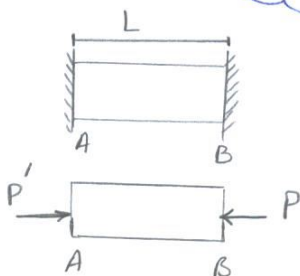
چون میله هگلی است و سطح مقطع یکنواخت دارد، گرفتگی ϵ_T در هر نقطه برابر با $\epsilon_T = \delta_T/L$ ، و بنابراین

صفر است. اما، پس از بالا بردن دما، تکیه‌گاه‌ها دینورسادی و مخالف P و P' بر میله وارد می‌کنند

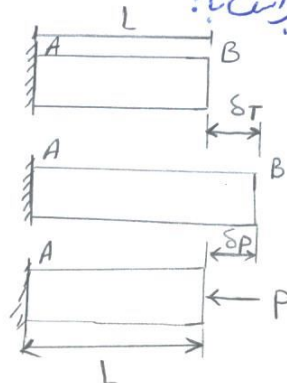
تا مانع افزایش طول آن شوند. به این ترتیب نتیجه می‌گیریم که حالتی از تنش (بدون گرفتگی متناظر)

$$\sigma = -E \alpha \Delta T$$

در میله ایجاد می‌شود که برابر است با:



۱۴

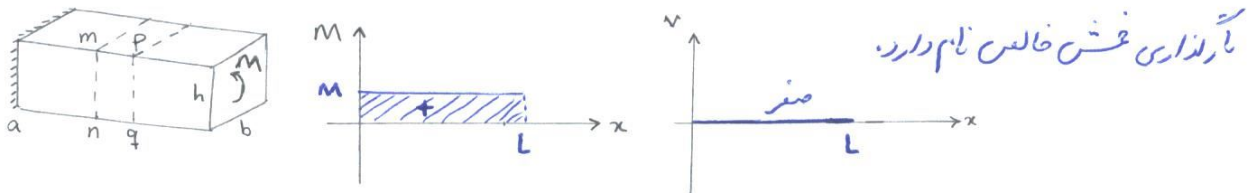


خمش خالص

مفاهیم اولیه خمش

در شکل زیر تیر ab با مقطع مستطیل، تحت اثر لنگر خمشی M در نقطه p قرار گرفته است. در این حالت از بارگذاری،

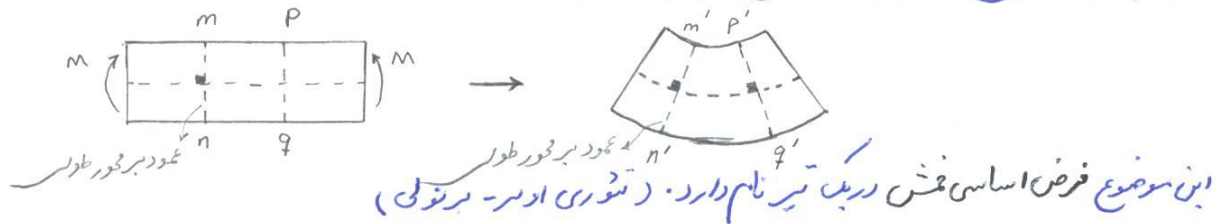
در تمام مقاطع عرضی تیرها لنگر خمشی M مؤثر بوده و نیروهای برشی و محوری در این مقاطع صفر است. این وضعیت از



با توجه به شکل گسترش داده شده می توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱. در خمش خالص یک تیر فرض می شود که مقاطع عمود بر محور طولی مانند mn و pq ، پس از بارگذاری نیز

عمود بر محور طولی تیر و به صورت سطح باقی می ماند.



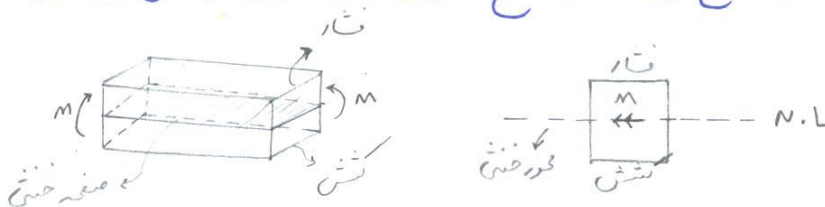
این موضوع فرض اساسی خمش در یک تیر نام دارد. (تئوری اوست- برنولی)

۲. همان گونه که در شکل فوق مشاهده می شود تارها را mp (مانند mp) تحت فشار قرار گرفته و کامکش طول

می دهند و تارهای nq (مانند nq) تحت کشش قرار گرفته و افزایش طول می دهند. به سادگی می توان نتیجه

گرفت که تارهای وجود دارد که اندازه آن ثابت و تغییر طول نمی دهد. مکان هندسی این تارها در شکل زیر

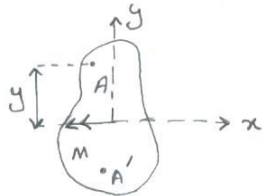
تحلیل صفحه خمشی را داده و محل تقاطع این صفحه با مقطع عرضی را محور خمشی یا تار خمشی می نامند.



بخش ساده (تک محوره)

مقطع دوجاوی با محورهای اصلی x و y مطابق شکل زیر را در نظر بگیرید. هرگاه لگرم بخش در راستای یکی از محورهای اصلی واقع شود، در مقطع حالت بخش ساده (تک محوره) رخ می دهد. تنش را

قائم ایجاد شده در نقاط مختلف در حالت بخش ساده از رابطه زیر قابل پی بردن باشد:



$$\sigma_A = - \frac{My}{I_x}$$

M : گشتاور بخش دارد بر مقطع حول محور x

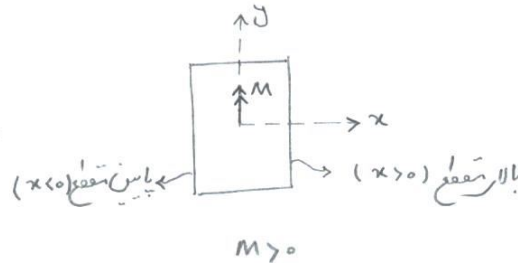
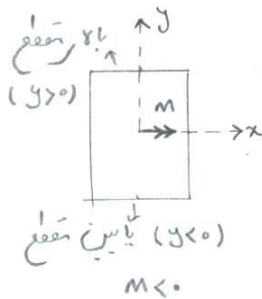
$\sigma_A < 0$ فشاری

$\sigma_{A'} > 0$ کششی

I_x : عکاس اینرسی حول محور اصلی موازی لگرم بخش

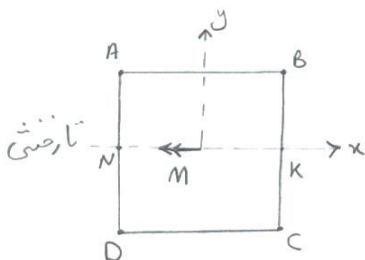
نکته: در رابطه فوق لگرم بخش مثبت بر طبق قرارداد اگر استاتیکی پایین مقطع را تحت تنش و بالایی مقطع را تحت فشار قرار می دهد. در نگاه مختصات فوق، تارهای پایین هستند که نسبت به محور بخش

فاصله سقر دارند.



در شکل زیر مطابق قانون دست راست اگر انگشت شست دست راست را در راستای لگرم بخش قرار داده و چهار انگشت دیگر را خم کنیم، این انگشت ها در قسمت AB به صغه داخل و در قسمت CD از صغه

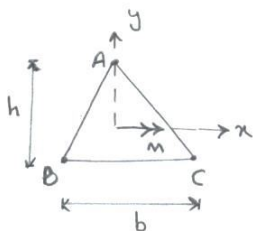
خارج می شوند. بنابراین نقاط A و B تحت فشار و نقاط C و D تحت کشش قرار دارند.



$$\sigma_A < 0 \quad , \quad \sigma_B < 0$$

$$\sigma_N = 0 \quad , \quad \sigma_K = 0$$

$$\sigma_D > 0 \quad , \quad \sigma_C > 0$$



مثال ۱ در مقطع مقابل تنش قائم در رؤوس مثلث را بدست آورید .

کنش M به سطح راست کنش و پایین مقطع را تحت اثر قرار داده

و بر همین نکته کنش در A کنش و در B و C کنش است .

$$I_x = \frac{bh^3}{36}$$

کنش

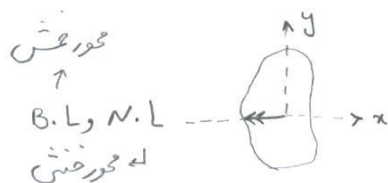
$$\text{تنش قائم در نقطه } A : y_A = +\frac{2}{3}h \Rightarrow \sigma_A = \frac{M \times (\frac{2}{3}h)}{\frac{bh^3}{36}} = \frac{24M}{bh^2}$$

$$\text{تنش قائم در نقاط } B, C : y_B = y_C = -\frac{1}{3}h \Rightarrow \sigma_B = \sigma_C = \frac{M \times (\frac{1}{3}h)}{\frac{bh^3}{36}} = \frac{12M}{bh^2} \rightarrow$$

$$\sigma_B = \sigma_C = -\frac{12M}{bh^2} \quad \text{کشش}$$

نکات مهم کنش یک محوره

۱. در محل تار خشی تنش قائم برابر با صفر است .

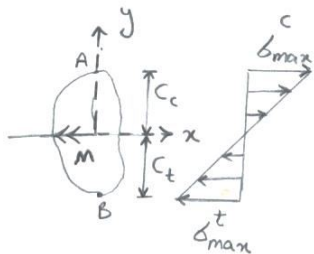


$$\sigma = -\frac{My}{I} = 0 \rightarrow y = 0 \quad (\text{تار خشی})$$

یعنی تار خشی در این حالت بر محور کنش منطبق بوده و y معادل فاصله نقطه مورد نظر از تار خشی نیز باشد.

۲. با توجه به توزیع خطی تنش در مقطع، مقادیر حداکثر تنش در دورترین فاصله از تار خشی، یعنی در بالا و پایین

مقطع رخ می دهد. در بخش ثبت حداکثر تنش در نقطه A رخ داده زیر تون نوشت :



$$\sigma_{max}^c = -\frac{M \times c_c}{I} \Rightarrow |\sigma_{max}^c| = \frac{M}{\frac{I}{c_c}} = \frac{M}{S_c}$$

S_c : اساس مقطع در

همچنین حداکثر تنش کنش در نقطه B رخ داده داریم :

$$\sigma_{max}^t = -\frac{M \times (-c_t)}{I} \Rightarrow \sigma_{max}^t = \frac{M}{\frac{I}{c_t}} = \frac{M}{S_t}$$

S_t : اساس مقطع کنش

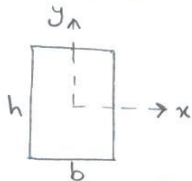
معان اینرسی (یا داکرسی)

یکی از خواص مهم سطوح، معان اینرسی است. همانطور که در یک عضو تحت اثر بار محوری، عامل مقاوم در برابر

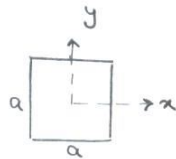
بار سطح مقطع است؛ در یک عضو خمشی، فلزات یک تیر، عامل مقاوم در برابر فشار معان اینرسی است. معان

اینرسی نسبت به محور خمشی الاستیک محاسبه می‌شود. در زیر معان اینرسی چند مقطع ساده و پرکاربرد ارائه

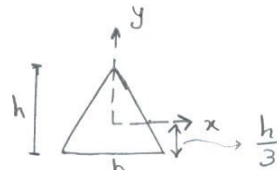
شده است.



$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

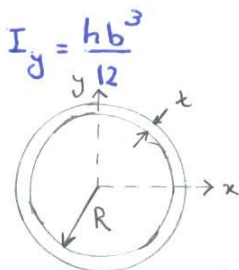


$$I_x = I_y = \frac{a^4}{12}$$

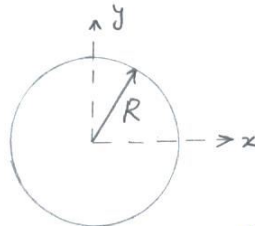


$$I_x = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{48}$$



$$I_x = I_y = \pi R^4$$



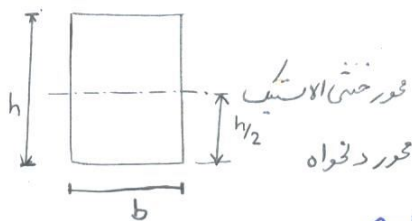
$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$$

در صورتی که مقدار معان اینرسی نسبت به محوری غیر از محور خمشی الاستیک نیاز باشد، باید به صورت زیر عمل کرد:

اثر انتقال محور + معان اینرسی نسبت به محور خمشی الاستیک = معان اینرسی نسبت به محور دلخواه

$I = I_c + Ad^2$
d: فاصله محور دلخواه تا محل محور خمشی الاستیک

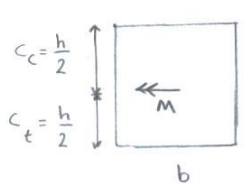
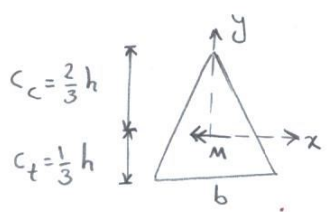
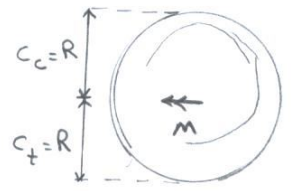
به طور مثال به بررسی معان اینرسی یک مقطع استیپلی حبل ضلع خود داریم:



$$I = \frac{bh^3}{12} + Ad^2$$

$$\frac{A=bh}{d=h/2} \rightarrow I = \frac{bh^3}{12} + (bh)\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{3}$$

نکته: اگر مقطع حول محور غش متقارن باشد، اساس مقطع فشاری و کششی یکسان خواهد بود.
 - اساس مقطع کشش و فشاری بهره‌برنی از مقاطع هم تحت لنگر غش نشان داده شده عبارت است از:

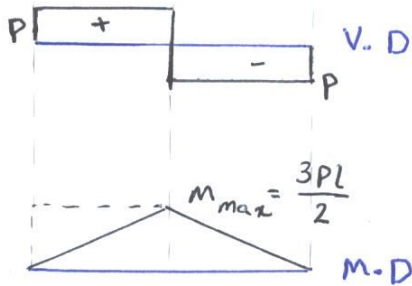
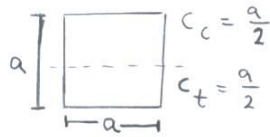
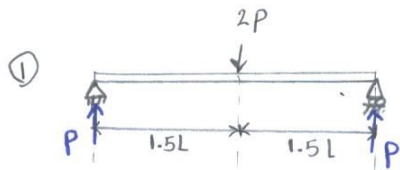
	$\begin{cases} S_c = \frac{I}{c_c} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6} \\ S_t = \frac{bh^2}{6} \end{cases}$
	$\begin{cases} S_c = \frac{I}{c_c} = \frac{bh^3/36}{\frac{2}{3}h} = \frac{bh^2}{24} \\ S_t = \frac{I}{c_t} = \frac{bh^3/36}{\frac{1}{3}h} = \frac{bh^2}{12} \end{cases}$
	$\begin{cases} S_c = \frac{I}{c_c} = \frac{\frac{\pi}{4}R^4}{R} = \frac{\pi}{4}R^3 \\ S_t = \frac{\pi}{4}R^3 \end{cases}$

- بنابراین در مقطع متقارن حول محور غش، تنش هر دو اکثر کشش و فشاری یکسان بوده و مقدار آن عبارت

است از: $\sigma_{max} = \frac{M}{S}$ و $S = \frac{I}{c}$

نکته: بهره‌بر کردن حداکثر تنش از فشاری و کشش در طول یک تیر با چسب و ارتفاع ثابت، ابتدا نمودار لنگر غشی را رسم کرده و سپس در نقاطی که لنگر غش مثبت و منفی مقادیر بیشینه را دارد، مقادیر تنش را به دست می‌آوریم.
 در انتها با مقایسه این مقادیر، حداکثر تنش هر کشش و فشاری را در مقطع به دست می‌آوریم.

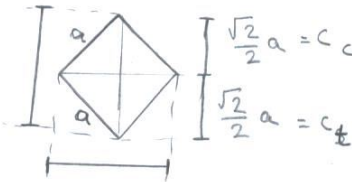
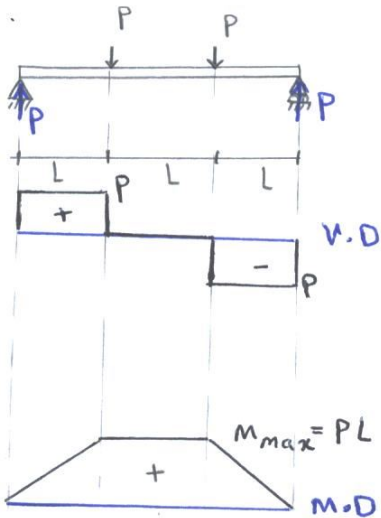
مثال تنش خمشی حداکثر را در تیرهای زیر محاسبه نمایید.



$$\delta_{max} = \frac{M_{max} c}{I} = \frac{M}{S}$$

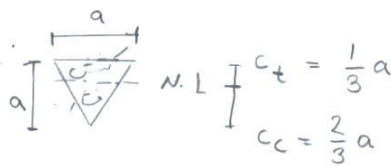
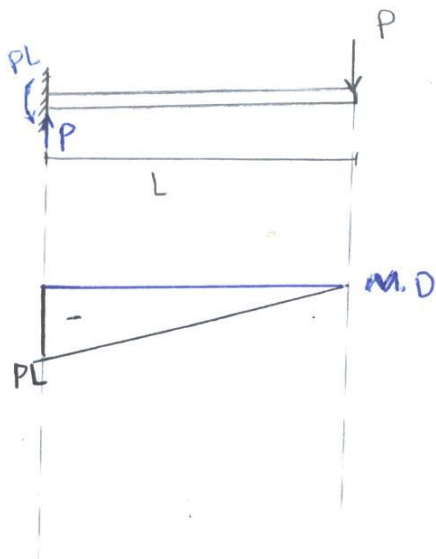
$$\delta_{max} = \frac{\frac{3PL}{2} \times \frac{a}{2}}{\frac{a^4}{12}} = \frac{9PL}{a^3}$$

②



$$\delta_{max} = \frac{M_{max} \times c}{I} \rightarrow$$

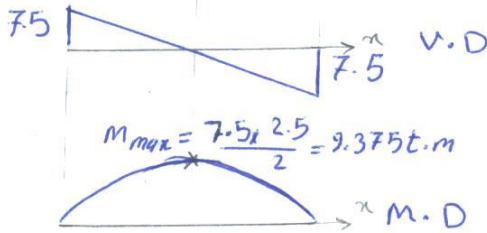
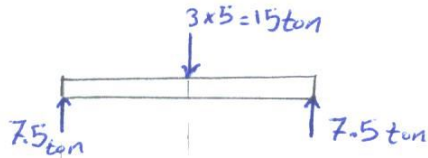
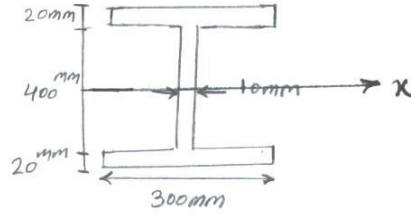
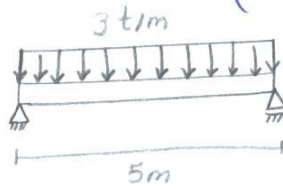
$$\delta_{max} = \frac{PL \times \frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{a^4}{12}} = \frac{12\sqrt{2}PLa}{2a^4} = \frac{6\sqrt{2}PL}{a^3}$$



$$\delta_{max}^t = \frac{M_{max} c_t}{I} = \frac{PL \times \frac{a}{3}}{\frac{a^4}{36}} = \frac{12PL}{a^3}$$

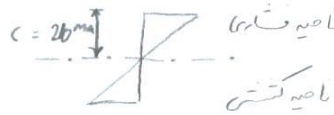
$$\delta_{max}^c = \frac{M_{max} \times c_c}{I} = \frac{PL \times \frac{2}{3}a}{\frac{a^4}{36}} = \frac{24PL}{a^3}$$

مثال: بیشترین تنش فشاری شکل زیر را بدست آورید. (kg/cm²)



۴۴۴۰

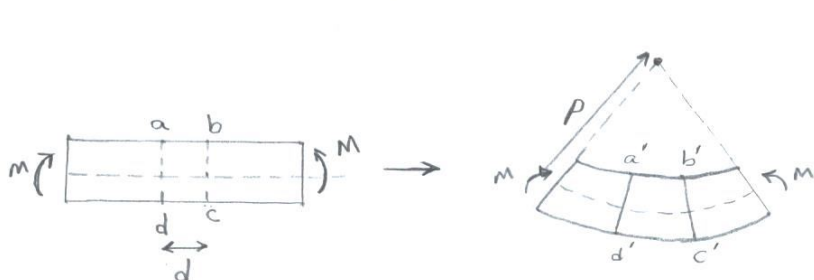
$$I_x = \left[\frac{1}{12} \times 300 \times 20^3 + (300 \times 20 \times 210^2) \right] \times 2 + \left[\frac{1}{12} \times 10 \times 400^3 \right] = 582.9 \times 10^6 \text{ mm}^4$$



$$\sigma = \frac{MC}{I} = \frac{9.37 \times 10^5 \times 22}{582.9 \times 10^6 \times 10^{-4}} = 353.64 \text{ kg/cm}^2$$

بررسی شعاع انحنای متقطع در حالت خمش خالص

عنوتان داده شده در شکل زیر تحت گشتش M در دو انتها واقع شده است. در این حالت تارهای بالایی کاهش طول و تارهای پایینی افزایش طول می دهند. بنابراین تارهای در مقطع وجود دارند که تغییر طولی نخواهد داشت. نامله مرکز انحنای تارها را شعاع انحنای نامیم.



$$\frac{1}{P} = \frac{M}{EI}$$

P : شعاع انحنای

$\frac{1}{P}$: انحنای

I : عان اینرسی حول محور خمشی

نکته ۱، در رابطه بالا، انحنای با تغییر مثبت دارای علامت مثبت و انحنای با تغییر منفی دارای علامت منفی است.



نکته ۲، با بررسی روابط تنش و شعاع انحنای، تنش و کرنش در نقاط مختلف مقطع عبارت است از:

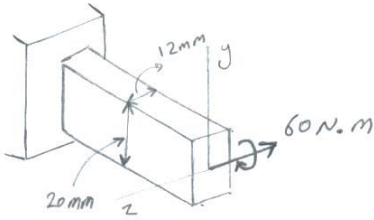
$$\begin{cases} \frac{1}{P} = \frac{M}{EI} \\ \epsilon = -\frac{My}{I} \end{cases} \rightarrow M = \frac{EI}{P}$$

و کرنش هر طوی در مقطع عبارت است از:

$$\epsilon = \frac{\delta}{E} \Rightarrow \epsilon = -\frac{y}{P}$$

مثال ۱، به سله فولادی شکل زیر کوپلی برابر با $M = 400 \text{ N.m}$ اعمال می شود. الف) فرض کنید که این کوپلی همانطور که در شکل نشان داده شده حول محور Z وارد می شود، تنش ماکزیمم و شعاع انحنای سله را تعیین کنید.

ب) سمت الف را با این فرض حل کنید که کوپلی مورد نظر حول محور Y وارد می شود. $(E = 200 \text{ GPa})$



الف) تنش حول محور z

$$I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} \times (12)(20)^3 = 8 \times 10^3 \text{ mm}^4 = 8 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$c = \frac{20}{2} = 10 \text{ mm} = 0.010 \text{ m}$$

$$\sigma = \frac{M c}{I} = \frac{60 \times 10^3 \times 10}{8 \times 10^3} = 75 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 75 \text{ MPa}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{60 \times 10^3}{200 \times 10^9 \times 8 \times 10^{-9}} = 37.5 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

$$\rho = \frac{1}{37.5 \times 10^{-3}} = 26.67 \text{ m}$$

ب) تنش حول محور y

$$I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} (20)(12)^3 = 2.88 \times 10^3 \text{ mm}^4 = 2.88 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

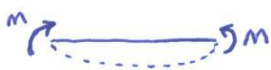
$$c = \frac{12}{2} = 6 \text{ mm} = 0.006 \text{ m}$$

$$\sigma = \frac{M c}{I} = \frac{60 \times 10^3 \times 6}{2.88 \times 10^3} = 125 \text{ MPa}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{60}{(200 \times 10^9)(2.88 \times 10^{-9})} = 104.17 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

$$\rho = 9.6 \text{ m}$$

پیش



تعریف پیش: در بخش راستای کنتر عود بر راستای تیر است.

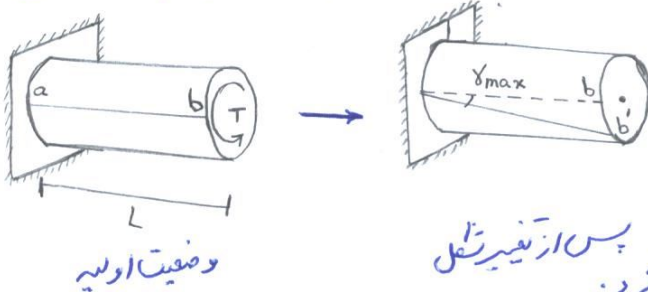


تعریف پیش: در پیش، راستای کنتر موازی با راستای تیر است.

- پیش در مقاطع مختلف: ۱- مقاطع دایره‌ای توپر، توخالی و جدار نازک ۲- مقاطع مستطیلی ۳- مقاطع جدار نازک باز ۴- مقاطع جدار نازک بسته بررسی می‌شود.

پیش در مقاطع دایره‌ای

در شکل زیر میلۀ ابر با مقطع عرضی دایره، تحت اثر کنتر پیش T در انتهای خود قرار گرفته است. در این حالت از ناگذاری، تمام مقاطع عرضی میلۀ تحت کنتر پیش T قرار گرفته و وضعیت پیش خالص ایجاد شده است.



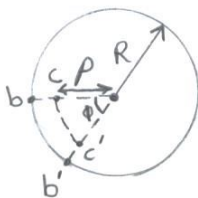
پس از تغییر شکل با توجه به شکل کرفوق، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱) با توجه به تقارن مرکزی دایره، می‌توان نشان داد که این مقاطع مانند اجسام صلب حول محور طول دوران کرده و پس از تغییر شکل نیز به صورت دایره‌ای و سطح جانبی می‌مانند.

۲) میزان دوران هر مقطع از میلۀ رازا به پیش مقطع نامیده و آن را با ϕ نشان می‌دهیم. تغییر زاویه ایجاد شده در سطح جانبی را نیز تغییر شکل برش حداکثر نامیده و آن را با γ_{max} نشان می‌دهیم.

۳) پس از تغییر شکل، نقطه a مانند b به وضعیت b' منتقل می‌شود. طول کمان bb' با توجه به شکل زیر

در شکل کرفوق عبارت است از:



$$bb' = \gamma_{max} \times L = \phi \times R \Rightarrow \frac{\phi}{L} = \frac{\gamma_{max}}{R} \Rightarrow \gamma_{max} = \frac{R\phi}{L}$$

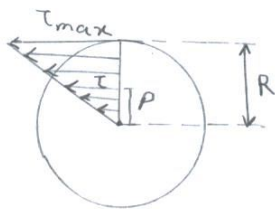
اگرست به این عمل را برای نقطه C در فاصله p از مرکز دایره، انجام دهیم، کرنش برشی عبارت است از:

$$\gamma = \frac{\rho \phi}{L} \Rightarrow \gamma \times L = \rho \times \phi \Rightarrow \gamma \times L = \phi \times \rho$$

بنابراین کرنش برشی به صورت خطی تغییر کرده و متناسب با فاصله از مرکز سطح می باشد. $\gamma \propto \rho$

۴) در اثر گشت پیچش T در مقطع، تنش برشی به صورت عمود بر شعاع اثر می کند. جهت تنش برشی در نقاط مختلف دایره به سمتی است که حول مرکز آن، گشتاوری هم جهت با T ایجاد کند.

اگر رابطه تنش و کرنش نیز خطی فرض شود، تنش برشی متناسب با فاصله از مرکز می باشد.



$$\begin{cases} \tau = \frac{T \rho}{J} \\ \tau_{max} = \frac{T R}{J} \end{cases}$$

$$J = I_x + I_y$$

J : مان اینرسی قطبی دایره

ρ : فاصله نقطه مورد نظر از مرکز دایره

R : شعاع دایره

۵) با توجه به رابطه $\gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G}$ ، زاویه پیچش انتهای میل عبارت است از:

$$\begin{cases} \frac{\phi}{L} = \frac{\gamma_{max}}{R} \rightarrow \phi = \frac{\gamma_{max} \times L}{R} \\ \gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G} = \frac{T R}{G J} \end{cases}$$

$$\rightarrow \phi = \frac{T L}{G J}$$

بر حسب رادیان

باید توجه شود که در این رابطه ϕ زاویه پیچش مقطع نسبت به تکیه گاه گیردار α است.

تنش برشی حداکثر در مقاطع دایره ای

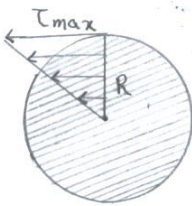
با توجه به رابطه $\tau = \frac{T \rho}{J}$ می توان فهمید که با افزایش فاصله از مرکز دایره، تنش برشی ناشی

از پیچش نیز افزایش می یابد. بنابراین در مقاطع دایره ای، تنش برشی حداکثر در روی محیط دایره،

که دورترین فاصله از مرکز را دارد رخ می دهد.

برای مقاطع دایره‌ای هم، همان اینرسی قطبی و تنش برشی حداکثر تحت گشتاور T عبارت است از:

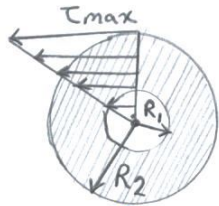
نسبت شعاع به ضخامت: $\frac{R}{t} > 20$



دایره توپر

اینرسی قطبی: $J = \frac{\pi R^4}{2}$

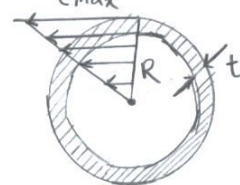
تنش برشی حداکثر: $\tau_{max} = \frac{2T}{\pi R^3}$



دایره توخالی مقدار مرکز

$J = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4)$

$\tau_{max} = \frac{2TR_2}{\pi (R_2^4 - R_1^4)}$

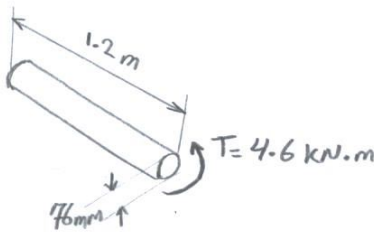


دایره جدا از یک

$J = 2\pi R^3 t$

$\tau_{max} = \frac{T}{2\pi R^2 t}$

مثال ۱: برای میلگردان آلومینیوم توپر شالی زیر حداکثر تنش برشی ناشی از گشتاوری به اندازه $T = 4.6 \text{ kN.m}$ را



$R = \frac{76}{2} = 38 \text{ mm} = 0.038 \text{ m}$

تعیین کنید.

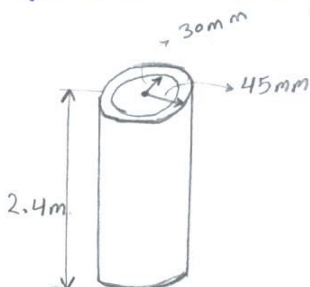
$J = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi \times (0.038)^4}{2} = 3.2753 \times 10^{-6} \text{ m}^4$

$\tau_{max} = \frac{2T}{\pi R^3} = \frac{2 \times 4.6 \times 10^3}{\pi \times (0.038)^3} = 53.4 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

$\tau_{max} = 53.4 \text{ MPa}$

$\tau_{max} = \frac{TR}{J} = \frac{(4.6 \times 10^3) \times 0.038}{3.2753 \times 10^{-6}} = 53.4 \times 10^6 \text{ Pa} = 53.4 \text{ MPa}$

مثال ۲: گشتاوری T را طوری تعیین کنید که حداکثر تنش برشی در میلگردان فولادی توخالی شالی زیر برابر



با 45 MPa باشد.

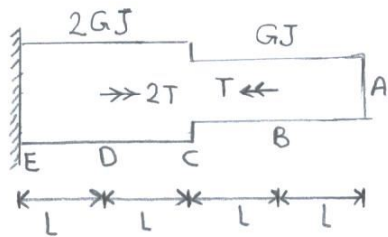
$J = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4)$

$J = \frac{\pi}{2} (45^4 - 30^4) = 5.1689 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 5.1689 \times 10^{-6} \text{ m}^4$

$\tau_{max} = \frac{2TR_2}{\pi (R_2^4 - R_1^4)} \Rightarrow \frac{2 \times T \times 45}{\pi (45^4 - 30^4)} = 45 \rightarrow$

$T = 5.1689 \times 10^6 \text{ N.m} = 5.1689 \times 10^3 \text{ N.m}$

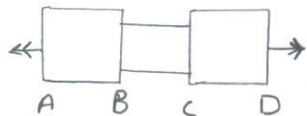
مثال ۳) محور نشان داده شده در شکل زیر تحت بارگذاری پیوسته قرار دارد: الف) زاویه پیمایش مقطع A را بدست آورید ب) زاویه پیمایش مقطع C را بدست آورید ج) اختلاف زاویه پیمایش B و D را بدست آورید؟



نکته: بهر محاسبه زاویه پیمایش یک مقطع از میل نسبت به مقطع دیگر آن، از رابطه $\phi = \frac{TL}{GJ}$ استفاده می‌کنیم. کاربرد این

رابطه، مثلاً به کاربرد رابطه $\Delta = \frac{PL}{EA}$ در محلول قبل می‌باشد. بابت این بار از این دو رابطه، در یک میل با

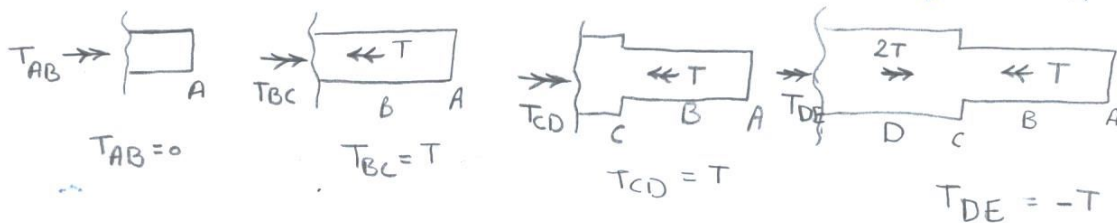
تغییرات پله‌ای سطح مقطع، اختلاف زاویه پیمایش بین دو انتها میل به عبارت است از:



$$\Delta\phi = \phi_D - \phi_A = \sum_{i=1}^n \frac{T_i L_i}{G_i J_i}$$

پایه - یا توجه به نمودار آزاد رسم شده به هر قسمت که مختلف باشد، زاویه پیمایش داخلی ایجاد شده در

هر قسمت عبارت است از:



$$\phi_A - \phi_E = \sum_{i=1}^n \frac{T_i L_i}{G_i J_i} = \frac{T_{AB} L_{AB}}{(GJ)_{AB}} + \frac{T_{BC} L_{BC}}{(GJ)_{BC}} + \frac{T_{CD} L_{CD}}{(GJ)_{CD}} + \frac{T_{DE} L_{DE}}{(GJ)_{DE}} \quad (\text{الف})$$

$$\phi_E = 0 \rightarrow \phi_A - \phi_E = 0 + \frac{T \cdot L}{GJ} + \frac{T \cdot L}{2GJ} + \frac{(-T) \cdot L}{2GJ} = \frac{TL}{GJ} \rightarrow \phi_A = \frac{TL}{GJ}$$

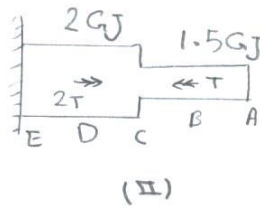
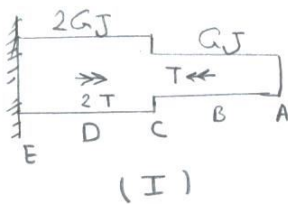
$$\phi_E = 0 \rightarrow \phi_C - \phi_E = \sum_{i=1}^n \frac{T_i L_i}{G_i J_i} = \frac{T_{CD} L_{CD}}{(GJ)_{CD}} + \frac{T_{DE} L_{DE}}{(GJ)_{DE}} = 0 \rightarrow \quad (\text{ب})$$

$$\phi_C = 0$$

$$\phi_{BD} = \phi_B - \phi_D = \phi_{BC} + \phi_{CD} = \frac{T_{BC} \times L_{BC}}{(GJ)_{BC}} + \frac{T_{CD} L_{CD}}{(GJ)_{CD}} = \frac{3}{2} \frac{TL}{GJ} \quad \text{ج ۱}$$

نتیجه ۱) به دست آوردن اختلاف زاویه پیمایش بین دو نقطه، حاصل $\frac{TL}{GJ}$ را به هر سمت که واقع بین آن دو نقطه جمع می‌کنیم.

نتیجه ۲) با توجه به تسمت‌ها، می‌توان فهمید که زاویه پیمایش نقطه C از صفحات تسمت AC استقل است. با توجه به این موضوع زاویه پیمایش نقطه C در شکل مقابل یکسان است.



$$(\phi_c)_I = (\phi_c)_{II} = \frac{TL}{GJ}$$

فصل چهارم: تغییر شکل تیرک معین

یکی از مهم ترین وظایف درس تحلیل سازه ها، تعیین تغییر شکل ها و به عبارتی تعیین مقدار انحراف در

نقاط مختلف یک سازه می باشد. هدف از این موضوع پیدا کردن مقدار بحرانی تغییر شکل ها در سازه و کنترل

آن با عبورده کس می آید این امر می باشد. این مطلب زمانی اهمیت پیدا می کند که سازه یا عضو مورد نظر

در برابر تنش که مختلف مقاوم بوده، اقامه دلیل تغییر شکل های زیاد از نظر جرم بر داری دچار مشکل خواهد شد.

روش های مختلف برای سبب تغییر شکل در سازه های معین

روش های مختلف برای سبب تغییر شکل، در سازه های معین وجود دارد. در این بخش به روش های زیر

پرداخته می شود: ۱- استفاده از استخوان کشی در پی ۲- گسترش سطح ۳- تیر زوج ۴- استفاده

از غودارها و دال های تیرک

نکته: سازه های غودار کشی می توان به صورت هم تقریبی منحنی تغییر شکل سازه در محصور تیرها را به

دست آورد. جایی که گتر کشی مثبت باشد شکل تیر به صورت کمانه ای و جایی که گتر کشی منفی باشد

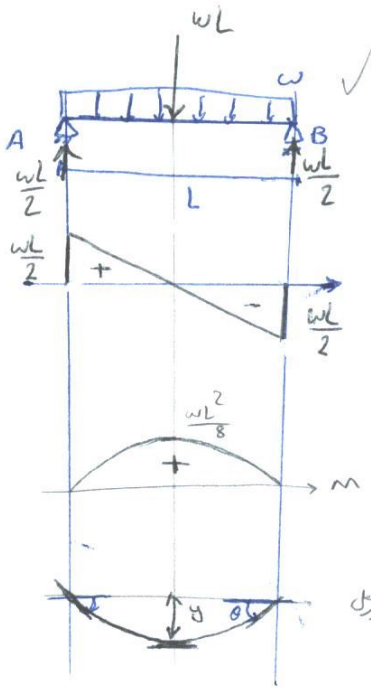
به صورت گتر کشی در می آید.

- نقطه عطف، نقطه ای است که گتر کشی در آن جا منفی باشد، در واقع جهت تغییر شکل در آن

نقطه عوض می شود.

- در جایی که گتر نداریم (مقدار گتر صفر است)، تغییر شکل خطی است.

قرار دارد علامت



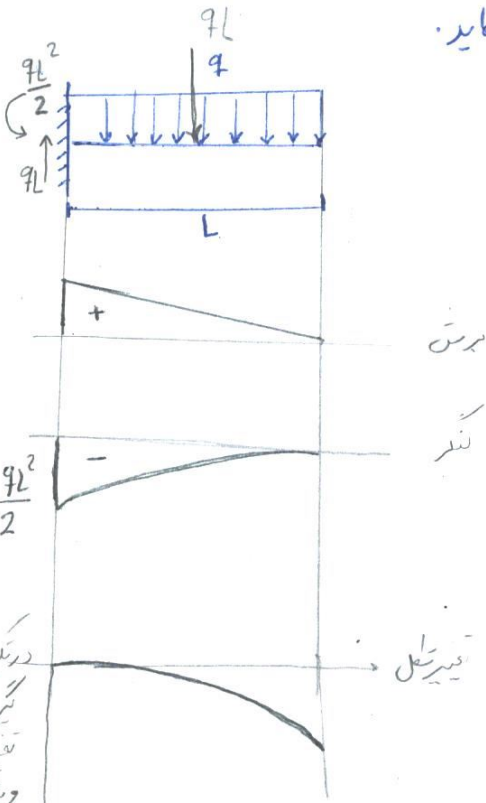
۱- محور x و y به ترتیب به سمت راست و بالا ← مثبت در نظر گرفته می شوند.

۲- تغییر مکان به سمت بالا مثبت است.

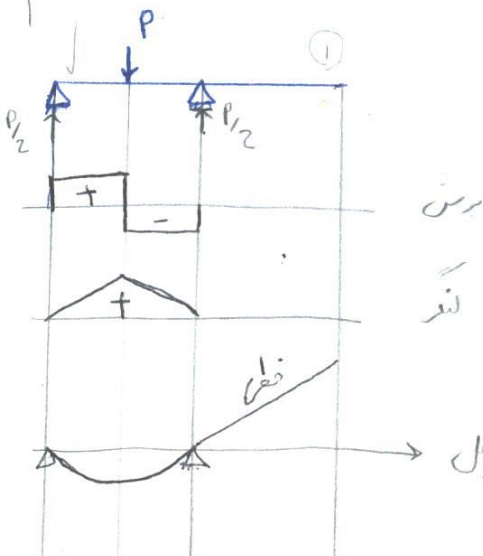
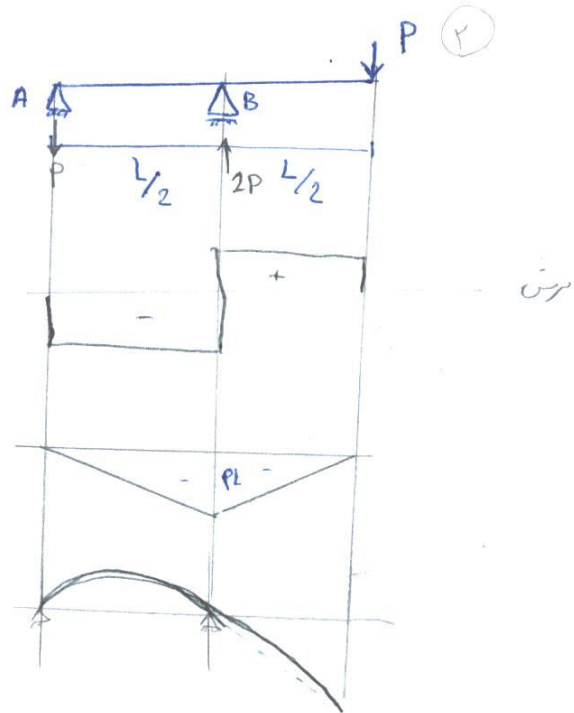
۳- شیب و زاویه چرخش مثبت نسبت به محور x با خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت مثبت می باشد.

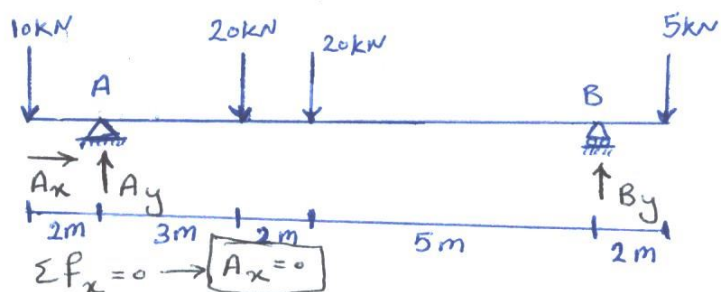
۴- انحنا و قطر مثبت است که تععر منتهی به سمت بالا باشد

۵- گنگر غشش و قطر مثبت است که در بخش فوقانی تیر ایجاد شود.



در تکیه ها
تغییر مکان
و شیب
صفحات

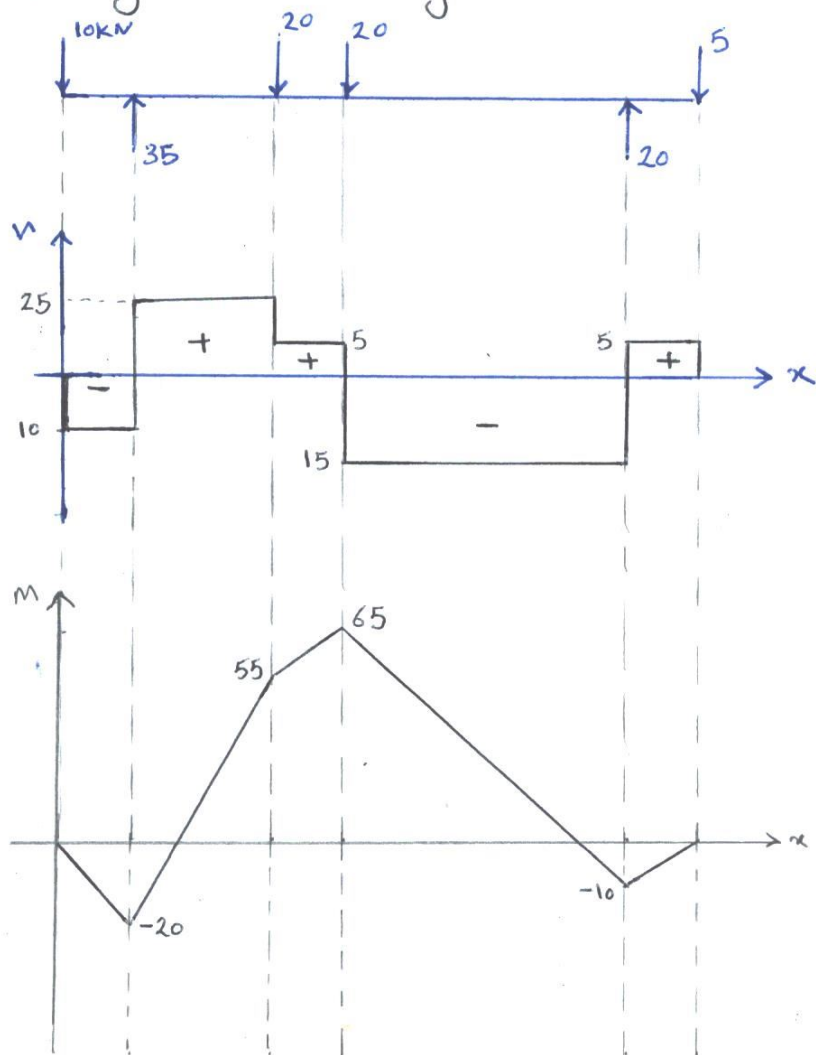




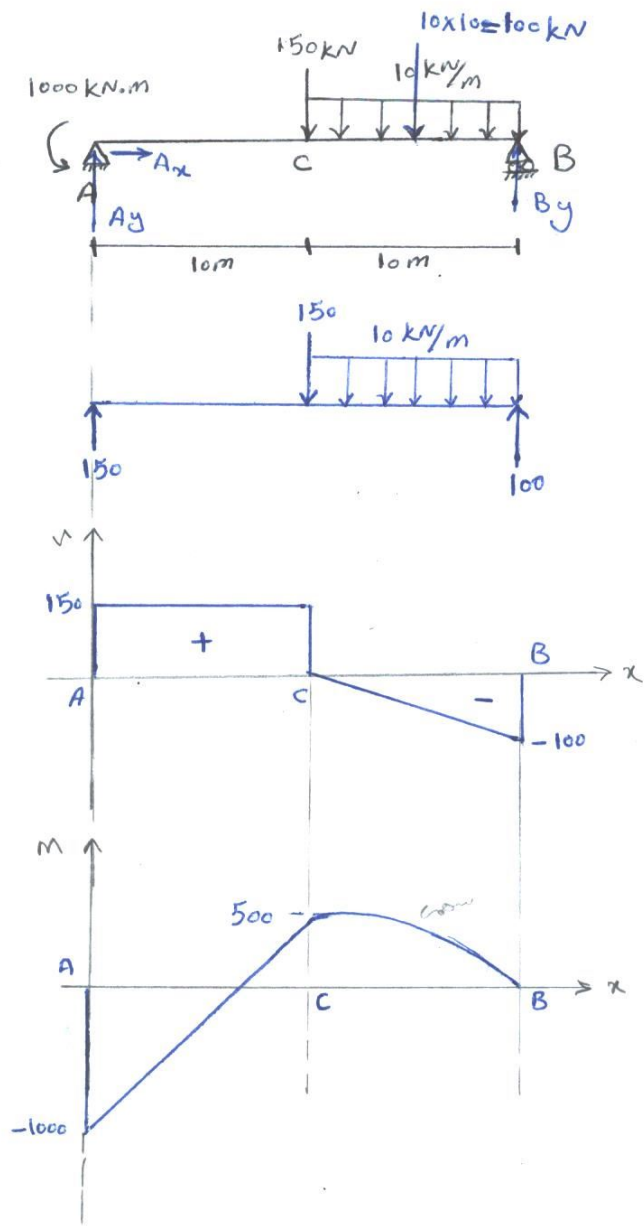
$$+\uparrow (\sum M_A = 0 \rightarrow (10 \times 2) - (20 \times 3) - (20 \times 5) + (B_y \times 10) - (5 \times 12) = 0$$

$$\rightarrow 10 B_y - 200 = 0 \rightarrow 10 B_y = 200 \rightarrow B_y = 20 \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow -10 + A_y - 20 - 20 + 20 - 5 = 0 \rightarrow A_y - 35 = 0 \rightarrow A_y = 35$$



نمودار ترسیمه آزاد:



$$\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow 1000 - (150 \times 10) - (100 \times 15) + (B_y \times 20) = 0$$

$$\rightarrow 20 B_y - 2000 = 0 \rightarrow 20 B_y = 2000 \rightarrow \boxed{B_y = 100 \uparrow}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 150 - 100 + 100 = 0$$

$$\rightarrow A_y - 150 = 0 \rightarrow \boxed{A_y = 150 \uparrow}$$

نکته: اگر از روش جمع زدن سطح زیر نمودار برش،

خواهیم گنجه را به دست آوریم در این روش گنجهای

متممتر را در نظر نمیگیریم. یعنی مساحت را تا سر

گنجه متممتر حساب می کنیم. جواب را با گنجه متممتر

جمع کرده و اگر گنجه متممتر را کمتر بود به سمت بالا

و اگر زیاد را کمتر بود به سمت پایین نمودار را رسم

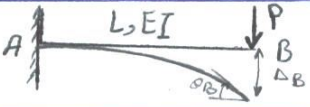
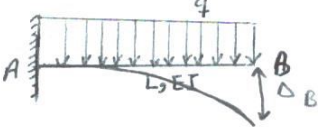
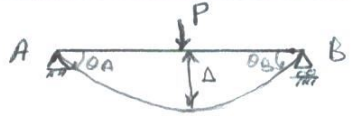
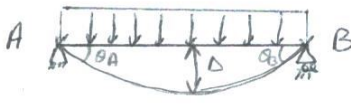
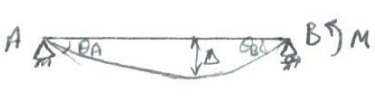
می کنیم.

روابط تیرهای پایه

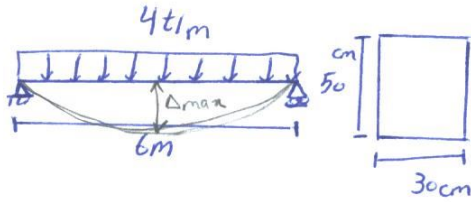
در این روش با استفاده از روابط تیرهای پایه، تغییر شکل نقاط از سازه را که شبیه این تیرها هستند،

به دست می‌آوریم. در واقع با دانستن تغییر شکل این تیرها می‌توان بارگذاری شان داده شده، تغییر مکان

نقطه دلخواه از سازه را می‌توانیم پیدا کرد.

انواع تیرها	تغییر مکان‌ها	دران‌ها
✓ 	$\Delta_B = \frac{PL^3}{3EI}$	$\theta_A = 0$ $\theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$
	$\Delta_B = \frac{qL^4}{8EI}$ $\Delta_A = 0$	$\theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$ $\theta_A = 0$
	$\Delta_B = \frac{ML^2}{2EI}$	$\theta_B = \frac{ML}{EI}$
✓ 	$\Delta = \frac{PL^3}{48EI}$	$\theta_A = \theta_B = \frac{PL^2}{16EI}$
✓ 	$\Delta = \frac{5qL^4}{384EI}$	$\theta_A = \theta_B = \frac{qL^3}{24EI}$
	$\Delta = \frac{ML^2}{16EI}$	$\theta_A = \frac{ML}{6EI}$ $\theta_B = \frac{ML}{3EI}$

مثال) خیز حداکثر را در تیر زیر به دست آورید.



$$E = 2 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$$

$$I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} \times 30 \times 50^3 = 312500 \text{ cm}^4$$

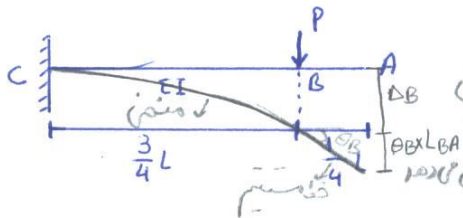
$$q = 4 \times \frac{10^3}{1.2} = 40 \text{ kg/cm}$$

$$L = 6 \times 100 = 600 \text{ cm}$$

$$\Delta = \frac{5 q L^4}{384 E I}$$

$$\Delta = \frac{5 \times 40 \times 600^4}{384 \times 2 \times 10^5 \times 312500} = 1.08 \text{ cm}$$

مثال) مقدار شیب و نیز انحراف A در تیر نشان داده شده را بیابید.



در فاصله نقطه B تا A هیچ گونه بار نگذاریم و در نقطه B بار P می‌گذاریم.

این بار به تیر در A و B ثابت بوده و فاصله خط میانه تغییر شکل را در نظر می‌گیریم.

در نتیجه مقدار شیب در نقاط A و B یکسان و برابر است با:

$$\theta_A = \theta_B = \frac{P(L_{BC})^2}{2EI} = \frac{P\left(\frac{3}{4}L\right)^2}{2EI} = \frac{9PL^2}{32EI}$$

$$\Delta_B = \frac{PL_{BC}^3}{3EI} = \frac{P\left(\frac{3}{4}L\right)^3}{3EI} = \frac{9PL^3}{64EI}$$

$$\Delta_A = \Delta_B + \theta_B \times L_{BA} = \frac{9PL^3}{64EI} + \frac{9PL^2}{32EI} \times \frac{L}{4} = \frac{18PL^3 + 9PL^3}{128EI} = \frac{27PL^3}{128EI}$$